Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

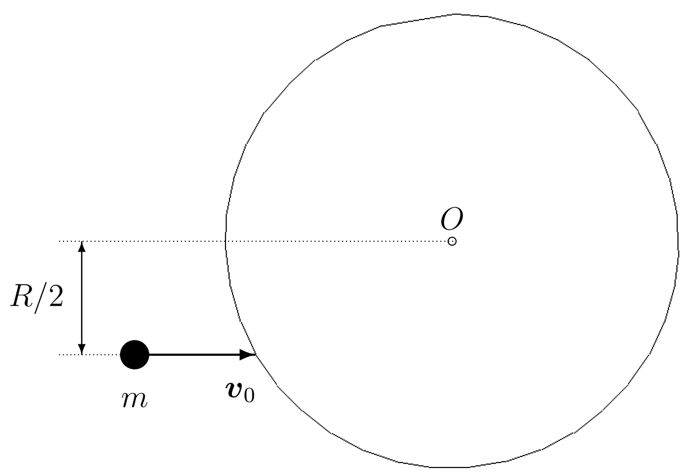
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (sólo del 2.º Parcial) Tiempo: 45 min.

Un cilindro circular macizo y homogéneo de masa M, radio R y altura H se halla en equilibrio en posición vertical colgado por el centro de su base superior mediante una rótula esférica, que permite la rotación sin rozamiento.

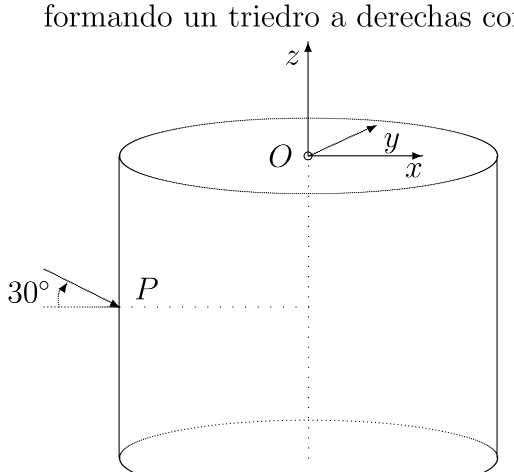
A la mitad de su altura incide una masa puntual m, con velocidad horizontal v_0 en la dirección indicada en la vista en planta de la figura. Supuesta la superficie lateral del cilindro perfectamente lisa, y el coeficiente de restitución e, obtener:

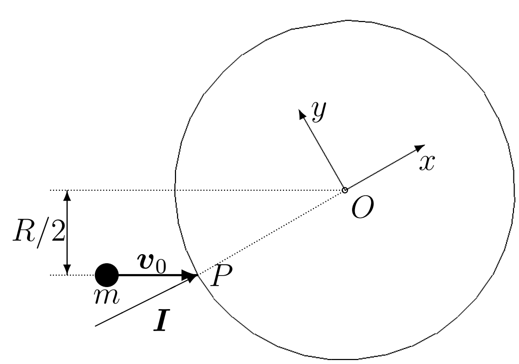
1. El campo de velocidades del sistema, después del impacto. (Cilindro y partícula).
2. La energía perdida en el choque.



---

1. La impulsión $\boldsymbol{I}$ será normal a la superficie del cilindro en el punto P de impacto, por lo que las expresiones se verán simplificadas empleando los ejes indicados en la figura, en que Ox está dirigido según la dirección de la percusión, Oz vertical ascendente, y Oy horizontal formando un triedro a derechas con los anteriores.





Sean $A = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$ y $C = \frac{1}{2}MR^2$ los momentos principales de inercia del cilindro en el punto fijo O. Expresamos la conservación del momento cinético del conjunto en la impulsión:

$$\boldsymbol{OP} \wedge m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{OP} \wedge m\boldsymbol{v} + A\Omega_x\boldsymbol{i} + A\Omega_y\boldsymbol{j} + C\Omega_z\boldsymbol{k}.$$

La velocidad de m sólo se ve alterada en la dirección Ox de la impulsión. Considerando que $\boldsymbol{OP} = -R\boldsymbol{i} - (H/2)\boldsymbol{k}$, resulta

$$\left(-R\boldsymbol{i} - \frac{H}{2}\boldsymbol{k}\right) \wedge m\left(v_0\frac{\sqrt{3}}{2} - v_x\right)\boldsymbol{i} = A\Omega_x\boldsymbol{i} + A\Omega_y\boldsymbol{j} + C\Omega_z\boldsymbol{k},$$

de donde se deduce

$$\Omega_x = \Omega_z = 0$$

$$-m\frac{H}{2}\left(v_0\frac{\sqrt{3}}{2} - v_x\right) = A\Omega_y \tag{1}$$

Falta una ecuación para completar la resolución, que se obtiene de expresar el coeficiente de restitución. Considerando que la velocidad horizontal del punto P después del impacto es $-\Omega_y(H/2)$, la expresión es

$$e = -\frac{v_x + \Omega_y(H/2)}{v_0\sqrt{3}/2}, \tag{2}$$

y resolviendo (1) y (2)

$$\Omega_y = -\frac{m\frac{H}{2}v_0\frac{\sqrt{3}}{2}(1+e)}{A + mH^2/4}$$

$$v_x = v_0\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{-Ae + mH^2/4}{A + mH^2/4}$$

Para completar la respuesta recordemos que las otras componentes de la velocidad de m no se ven alteradas, por lo que

$$v_y = -\frac{v_0}{2}; \quad v_z = 0$$

2. Para calcular la energía perdida, podemos aplicar la expresión general en función del valor de la impulsión y del coeficiente de restitución[1]:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{I}(1 - e)$$

siendo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= v_0\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - v_0\frac{1}{2}\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{I} &= m\left(v_x - v_0\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{i} \\
&= -mv_0\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A(1+e)}{A + mH^2/4}\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

[1]ver ecuación (11.15) del tomo II de Mecánica de J.M. Goicolea

luego

$$\boxed{\Delta T = -\frac{1}{2}mv_0^2\frac{3}{4}\frac{A(1-e^2)}{A+mH^2/4}}$$

Como comprobación, podemos calcular directamente la diferencia de las energías:

$$\begin{aligned}
T_1 - T_0 &= \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}A\Omega_y^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{4}v_0^2+v_0^2\frac{3}{4}\frac{(mH^2/4-Ae)^2}{(A+mH^2/4)^2}\right]+\frac{1}{2}Av_0^2\frac{3}{4}\frac{\left(m(H/2)(1+e)\right)^2}{(A+mH^2/4)^2}-\frac{1}{2}mv_0^2;
\end{aligned}$$

simplificando esta expresión se comprueba que el resultado es el mismo que el obtenido anteriormente.