Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (sólo del 2.º Parcial) Tiempo: 60 min.

Un cono de revolución con radio de la base r, altura h y masa m tiene fijo mediante una rótula esférica el vértice O, sin más restricciones en su movimiento. Inicialmente está con su eje horizontal, con una velocidad de rotación ω_0 alrededor de un eje vertical. se pide:

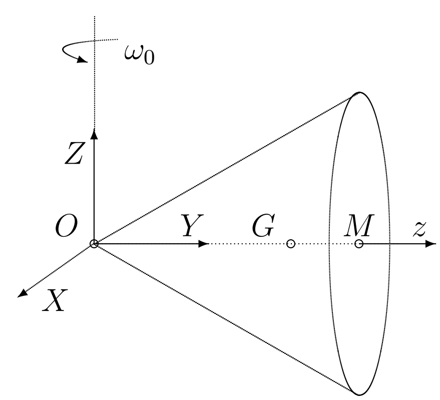
1. Razonar porqué en el movimiento subsiguiente el eje del cono no llega a la posición vertical (descendente), manteniéndose entre la posición horizontal inicial y otra de inclinación máxima que forme un ángulo α con la vertical ascendente.

2. Calcular el valor de dicho ángulo máximo α.

3. Para el instante en que el eje está en la inclinación máxima, obtener la velocidad de rotación instantánea (dirección y magnitud).

---

1. El movimiento es el de una peonza simétrica sometida a la gravedad con el punto O fijo. Consideramos un triedro fijo $OXYZ$ y otro móvil con el cuerpo $Oxyz$, cuyo eje Oz está dirigido según el eje de revolución del cono. Expresaremos las constantes del movimiento en función de los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) y de los componentes de la velocidad de rotación en el triedro del cuerpo, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$:



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} &= C\Omega_z = \text{cte.}\\
\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} &= A\dot{\psi}\,\text{sen}^2\theta + C\Omega_z\cos\theta = \text{cte.}\\
T + V &= \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\,\text{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}C\Omega_z^2 + mgd\cos\theta = \text{cte.}
\end{aligned}
$$

donde $A = \frac{3}{5}m(h^2 + r^2/4)$ y $C = \frac{3}{10}mr^2$ son los momentos principales de inercia en el vértice y $d = 3h/4$ la distancia del centro de masas G al vértice. Particularizando para las condiciones iniciales

$$\psi_0 = \varphi_0 = 0,\ \theta_0 = \frac{\pi}{2},\ \Omega_z = 0,\ \dot{\psi}_0 = \omega_0$$

resultan las expresiones

$$\Omega_z = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\psi}\,\text{sen}^2\theta = \omega_0 \tag{2}$$

$$A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\,\text{sen}^2\theta) + 2mgd\cos\theta = A\omega_0^2 \tag{3}$$

Eliminando $\dot{\psi}$ entre (2) y (3) se obtiene

$$A\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) + 2mgd\cos\theta = A\omega_0^2 \tag{4}$$

Mediante esta ecuación, que expresa la constancia de la energía en función únicamente de θ, se comprueba que no es posible llegar a $\operatorname{sen}\theta = 0$, ya que el término $\omega_0^2/\operatorname{sen}^2\theta$ llegaría a ser infinito mientras que los demás términos están acotados. Por tanto el movimiento se mantendrá entre dos valores extremos de la nutación θ, sin llegar a valer $\theta = 0$ ni $\theta = \pi$. Se comprueba inmediatamente que para $\theta = \pi/2$ sustituyendo en la ecuación (4) resulta $\dot{\theta} = 0$, por lo que esta posición horizontal inicial es uno de los extremos de θ (más abajo veremos que se trata del mínimo de θ, es decir de la posición más alta del eje del cono).

2. Llamando α al otro valor extremo de θ, para calcular su valor particularizamos (4) con la condición de extremo $\dot{\theta} = 0$:

$$A\frac{\omega_0^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} + 2mgd\cos\alpha = A\omega_0^2$$

llamando $u = \cos\alpha$ la ecuación queda

$$A\omega_0^2 u^2 + 2mgdu(1-u^2) = 0.$$

Al simplificar u en esta ecuación se elimina la solución $u = 0$ antes mencionada ($\alpha = \pi/2$), resultando una ecuación cuadrática:

$$u^2 - \frac{A\omega_0^2}{2mgd}u - 1 = 0$$

siendo la solución general

$$u = \frac{A\omega_0^2}{4mgd} \pm \sqrt{\left(\frac{A\omega_0^2}{4mgd}\right)^2 + 1}$$

El signo + de la raíz no es posible, ya que exigiría $\cos\alpha = u > 1$. La solución buscada es por tanto

$$u = \frac{A\omega_0^2}{4mgd} - \sqrt{\left(\frac{A\omega_0^2}{4mgd}\right)^2 + 1}$$

y sustituyendo los valores de A y d,

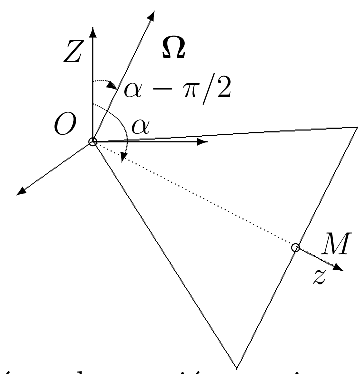
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{(h^2 + r^2/4)\omega_0^2}{5gh} - \sqrt{\left(\frac{(h^2 + r^2/4)\omega_0^2}{5gh}\right)^2 + 1}}$$

Observamos que esta solución exige $\cos\alpha < 0$, es decir $\alpha > \pi/2$, por lo que está debajo de la horizontal y se trata del extremo superior de θ, es decir, de la posición más baja del cono.

3. En la posición inferior es $\dot{\theta} = 0$ y por tanto el centro de la base del cono (M) tiene velocidad horizontal. Suponiendo los ejes del cuerpo orientados en este instante con Oz según el eje del cono, Ox horizontal y Oy perpendicular a los anteriores, será

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge d\boldsymbol{k} = -\Omega_x d\boldsymbol{j} + \Omega_y d\boldsymbol{i}$$

por lo que $\Omega_x = 0$. Por tanto la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ está dirigida según el eje Oy, que forma un ángulo $\alpha - \pi/2$ con la vertical OX. Aplicando la constancia del momento cinético según esta dirección,



$$A\Omega\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = A\omega_0$$

por lo que

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

Si se desea se puede obtener también las velocidades de precesión y de rotación propia en ese instante (la de nutación es nula como ya se ha dicho):

$$\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta = \Omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{\omega_0}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -\frac{\omega_0\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$