Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

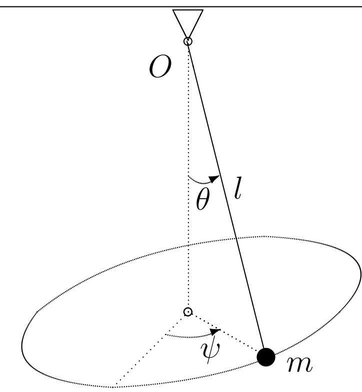
EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Sea el péndulo esférico de la figura. 1) *Obtener* dos ecuaciones independientes que describan el movimiento en función de las coordenadas (θ, ψ) y sus derivadas $(\dot\theta, \dot\psi)$. 2) *Eliminar* $(\psi, \dot\psi)$ de las anteriores dejando el movimiento expresado mediante una única ecuación diferencial de primer orden en función de $(\theta, \dot\theta)$. 3) *Describir* el movimiento.
(5 ptos.)



La Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left((l\dot\theta)^2 + (l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot\psi)^2\right) - (-mgl\cos\theta)$$

La coordenada ψ es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = ml^2\dot\psi\,\mathrm{sen}^2\,\theta = H \quad \text{(cte.)} \tag{1}$$

que es una de las ecuaciones pedidas. La otra proviene de la conservación de la energía, debido a que el campo de fuerzas gravitatorio es conservativo:

$$T + V = \frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) - mgl\cos\theta = E \quad \text{(cte.)}. \tag{2}$$

Los valores de las constantes H y E dependen de las condiciones iniciales. Despejando $\dot\psi$ de (1),

$$\dot\psi = \frac{H}{ml^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{3}$$

podemos eliminarla en (2):

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{H^2}{2ml^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} - mgl\cos\theta \tag{4}$$

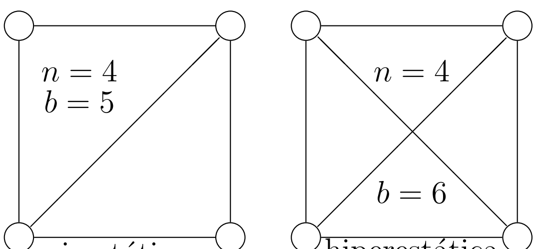
ecuación que responde a la segunda cuestión del enunciado.

Estas ecuaciones nos permiten describir el movimiento que se produce entre dos valores extremos de θ, de los cuales $\theta_{max} > \pi/2$, es decir que la posición más baja necesariamente queda por debajo de la horizontal. Otra característica fácil de observar, a partir de (3), es que la precesión lleva siempre el mismo signo, no produciéndose ni bucles ni cúspides en el mismo, como puede ser el caso para una peonza simétrica.

Para una estructura plana de barras articuladas, *explicar* los conceptos de isostatismo e hiperestatismo, dando asimismo un ejemplo sencillo de cada caso (2.5 ptos.)

Al estar articuladas, sin momentos aplicados en las uniones, cada barra está sometida a un esfuerzo axial o *tensión*. Al tratarse de una estructura, se excluye la posibilidad de que se trate de un mecanismo con movimientos posibles no impedidos. Diremos que la estructura es *isostática* si es posible solucionar todas las incógnitas del sistema (tensiones en barras y reacciones de apoyo) con las ecuaciones disponibles de la estática (equilibrio de cada nudo). Si por el contrario las ecuaciones de la estática no son suficientes diremos que la estructura posee barras redundantes y es por tanto *hiperestática*.

Admitiendo que el sistema posee b barras y n nudos y que los apoyos originan 3 reacciones incógnitas (como corresponde a una sustentación asimismo isostática), comparando el número de ecuaciones (2 por nudo) con el de incógnitas (la tensión de cada barra más las 3 reacciones) se obtiene el criterio numérico:



isostática   hiperestática

$$\begin{cases} 2n = 3 + b & \Rightarrow \quad \text{isostática} \\ 2n < 3 + b & \Rightarrow \quad \text{hiperestática} \end{cases}$$

Expresar la ecuación de Euler en forma vectorial para la dinámica de un sólido con un punto O fijo, conocido su tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$. Discutir la conveniencia de obtener esta ecuación derivando respecto del triedro del cuerpo, del triedro fijo, o del tiedro intermedio (para sólidos de revolución) (2.5 ptos.)

Llamando $\boldsymbol{M}_O$ al momento de las fuerzas en O, la ecuación de Euler es

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Esta ecuación se ha obtenido derivando el momento cinético ($\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$) en relación con el triedro del cuerpo y añadiendo el término complementario de derivación, por ser este sistema móvil. Esta forma es para un caso general la más conveniente, ya que al tomar la derivada relativa el tensor de inercia es constante.

Si se derivase directamente en relación con el triedro fijo, sería necesario también derivar el tensor de inercia, que dejaría de ser constante.

Para sólidos de revolución suele ser ventajoso, tomando la rotación propia alrededor del eje de revolución, derivar respecto al triedro intermedio, que se puede definir como aquél que le falta tan sólo la rotación propia para llegar al triedro del cuerpo. Al ser el sólido de revolución, el tensor de inercia es invariante ante la rotación propia y sigue siendo constante en la derivada relativa. Para expresar la ecuación consideramos que la velocidad de rotación de esta referencia es $\boldsymbol{\omega}_{ref} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, siendo $\varphi\boldsymbol{k}$ la rotación propia. Resulta

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_{rel} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}) \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$