Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 2.º* Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

---

Sea una partícula de masa $m$ que se mueve en el campo gravitatorio creado por otra masa puntual $M$ fija. *Obtener* la expresión del potencial efectivo, $V_{ef}(r) \stackrel{\text{def}}{=} E - m\dot{r}^2/2$, para un valor dado de la constante de las áreas $C$. (5 ptos.)

Partimos de la expresión de la energía total $(T+V)$ en coordenadas polares,

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}_{T} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{-V}$$

y considerando la constante de las áreas,

$$C = r^2\dot{\varphi},$$

la expresión pedida es

$$V_{ef}(r) = m\left(\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right).$$

Vemos que se trata, para un valor dado de $C$, de una función exclusivamente de $r$ con dimensiones de energía, motivo por el cual se le denomina "potencial efectivo".

*Discutir* razonadamente las posibles integrales primeras para un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ con una función Lagrangiana conocida $L$. (2.5 ptos.)

La dependencia funcional de $L$ se toma convencionalmente respecto a las variables $(q_i, \dot{q}_i, t)$ con objeto de precisar el significado de las derivadas parciales. Denominando $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L/\partial \dot{q}_i$ (momentos generalizados), las ecuaciones de Lagrange se escriben como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Se deduce inmediatamente que

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.} \quad (q_i \text{ cíclica})}$$

Otra posible integral primera es la *integral de Jacobi* que se deduce al derivar $L$, considerando también las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

llegándose a

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{cte.}}$$

Físicamente, las integrales primeras correspondientes a coordenadas cíclicas tienen la interpretación de la constancia de la cantidad de movimiento o del momento cinético, según sea una coordenada lineal o angular. La integral de Jacobi coincide con la energía total si el sistema no está definido mediante coordenadas móviles.

---

El movimiento de un sistema rígido general está definido como composición de dos rotaciones. *Describir* de forma razonada el movimiento resultante en todos los casos posibles. (2.5 ptos.)

Distinguiremos tres casos:

1. *dos rotaciones de ejes concurrentes.*- Sean éstas $\boldsymbol{\Omega}_1$ y $\boldsymbol{\Omega}_2$. Podemos componer los campos de momentos respectivos resultando una rotación pura $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$ alrededor de un eje que pase por el punto de corte y dirección $\boldsymbol{\Omega}$.

2. *dos rotaciones de ejes paralelos.*- Se trata de un caso particular del anterior pero cortándose en un punto impropio. El eje de la rotación resultante es paralelo a los dos anteriores, obteniéndose su posición mediante la condición de que proporcione el campo de velocidades suma $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_2$.

3. *dos rotaciones no concurrentes.*- Si los dos ejes se cruzan, el resultado es un movimiento helicoidal general (con traslación en dirección del eje y rotación alrededor del mismo suma de las dos rotaciones). No se trata de una rotación pura, al no exixtir puntos de velocidad nula.