Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

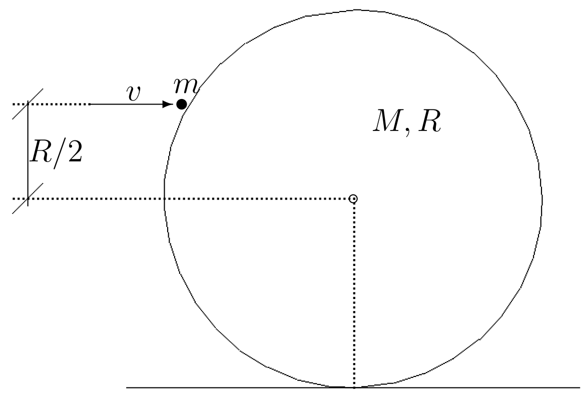
Mecánica

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

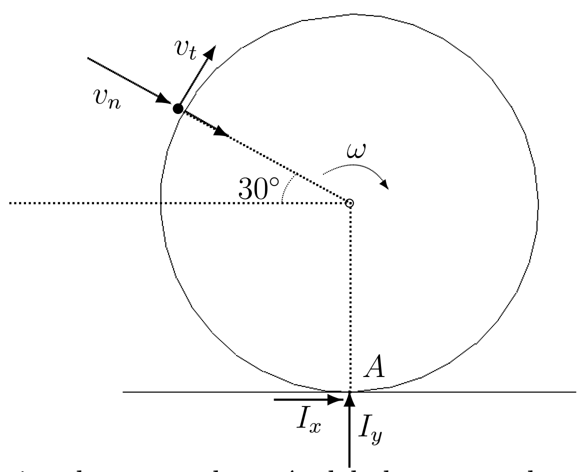
Un disco homogéneo de masa M y radio R contenido en un plano vertical puede rodar sin deslizar sobre una recta horizontal. Estando el disco en reposo recibe el impacto de una partícula de masa m con velocidad horizontal v en un punto de su perímetro a una altura $R/2$ sobre el centro del disco, siendo este choque liso y con coeficiente de restitución e. Se admite que en el contacto del disco con la recta horizontal existe el rozamiento suficiente para que no se produzca deslizamiento debido a la impulsión. Se pide:



1. definir el movimiento de la partícula y del disco en el instante posterior al choque;

2. obtener el coeficiente de rozamiento necesario en el contacto del disco con la recta para que se mantenga la hipótesis hecha de rodadura sin deslizamiento.

1.- La impulsión de la partícula sobre el disco es normal al mismo por ser liso. Por tanto no se modificará la velocidad de la partícula en dirección tangencial al mismo, v_t. Denominamos v_n a la velocidad normal de la partícula después de la impusión, y ω a la velocidad de rotación que adquiere el disco. Asimismo, I_x e I_y serán las componentes de la percusión reactiva que se produce en el punto A de apoyo del disco sobre la recta.



Puesto que la velocidad tangencial v_t de m es igual antes y después del choque, podemos excluirla de las ecuaciones de balance. Para la cantidad de movimiento, éstas resultan

$$mv\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+I_x = m\frac{\sqrt{3}}{2}v_n+M\omega R, \tag{1}$$

$$-mv\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+I_y = -mv_n\frac{1}{2}, \tag{2}$$

y para el momento cinético respecto del punto A

$$mv\frac{\sqrt{3}}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2} = mv_n\frac{R\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}MR^2\omega \tag{3}$$

(recordemos que en una impulsión es válido plantear el balance del momento cinético en el centro de rodadura aunque no sea fijo a lo largo del tiempo).

Por último, la ecuación del coeficiente de restitución se plantea según la percusión, es decir según la normal al disco:

$$ev\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(v_n - \omega R\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{4}$$

Con las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se pueden resolver las incógnitas (v_n, ω, I_x, I_y), resultando

$$\boxed{v_n = \frac{m - 2Me}{m + 2M}\frac{\sqrt{3}}{2}v}$$

$$\boxed{\omega = \frac{m}{m + 2M}\frac{v}{R}(1 + e)}$$

Recordemos que v_t se conservaba,

$$\boxed{v_t = \frac{v}{2},}$$

con lo que queda definido completamente el movimiento después del choque.

2.- De las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$I_x = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m + 2M}v(1 + e); \quad I_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mM}{m + 2M}v(1 + e)$$

(el signo $-$ de I_x indica que se orienta en sentido contrario al tomado como positivo en la figura). El coeficiente de rozamiento necesario es pues

$$\mu \geq \frac{|I_x|}{|I_y|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

es decir, el ángulo de rozamiento debe ser al menos de 30°.

Se puede comprobar que la impulsión reactiva resultante en A pasa precisamente por el punto de impacto de la masa; su suma vectorial con la impulsión activa producida por ésta resulta en una impulsión neta horizontal de valor $I = MR\omega$ aplicada en el punto de impacto. Es fácil comprobar que un disco libre sometido a esta impulsión adquiere precisamente un movimiento que equivale a una rotación instantánea alrededor del punto A.