Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

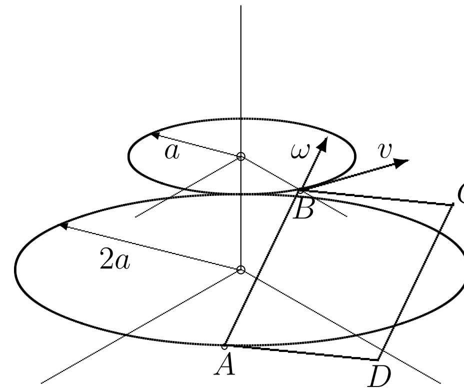
Mecánica

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

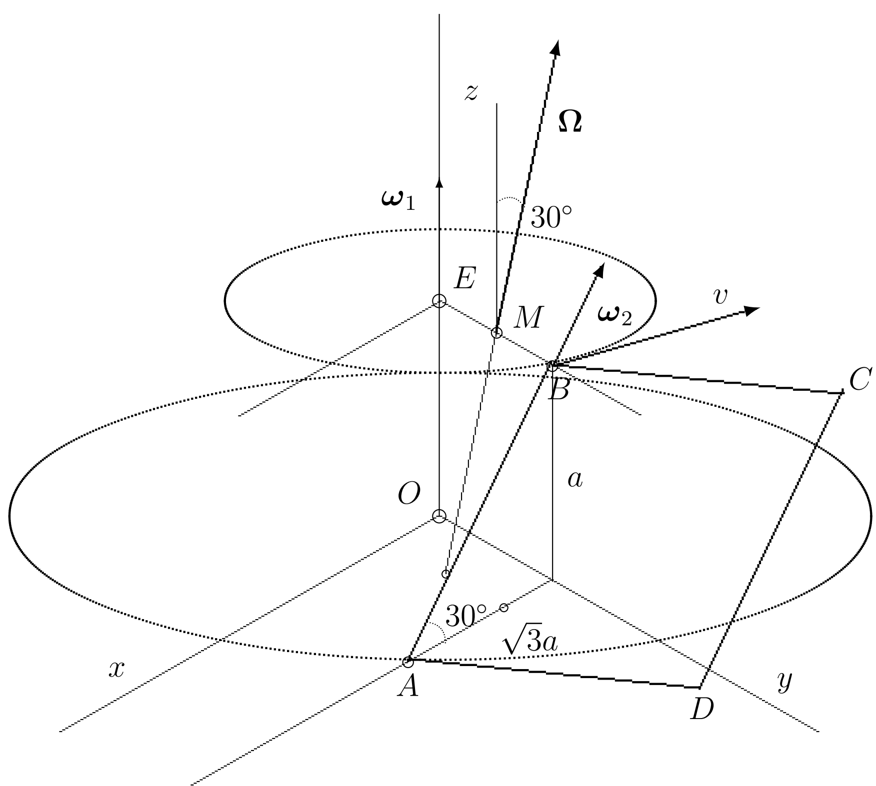
Una placa $ABCD$ se mueve de forma que los dos vértices A y B describen dos circunferencias paralelas con el mismo eje, de radios $2a$ y a respectivamente, situada esta última a una distancia a sobre la primera, siendo la velocidad con que recorre el punto B la circunferencia superior $v = a\omega$. Al tiempo, la placa gira alrededor del eje AB con velocidad angular ω. Se conoce la distancia $AB = 2a$. Se pide:



1. velocidad y aceleración angular de la placa;
2. eje del movimiento helicoidal tangente y velocidad mínima de este movimiento;
3. axoides del movimiento.

1.- El movimiento de la placa se puede interpretar como la composición de dos rotaciones de módulo ω, una según el eje Oz ($\boldsymbol{\omega}_1$) y otra según AB ($\boldsymbol{\omega}_2$). Es inmediato calcular la orientación de AB, que viene fijada por la longitud del segmento $AB = 2a$; situando B en las coordenadas $(0, a, a)$, el punto A estará en $(\sqrt{3}a, a, 0)$ (ver figura adjunta).

Los ejes Oz y AB se cruzan bajo un ángulo de 60° siendo su mínima distancia el segmento BE. Por tanto el movimiento resultante es un movimiento helicoidal general (es decir, *no es una rotación pura*).



La velocidad angular es la suma de $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \underbrace{\omega \boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \underbrace{\omega\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)}_{\boldsymbol{\omega}_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\Omega} = -\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \omega\frac{3}{2}\boldsymbol{k}}$$

El movimiento es tal que $\boldsymbol{\Omega}$ efectúa un giro alrededor de Oz, manteniendo su módulo, orientación y posición relativa a este eje. Por tanto, la aceleración angular proviene de la rotación alrededor de $\boldsymbol{\omega}_1$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\omega^2\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}}$$

2.- El eje del movimiento helicoidal tangente es el que pasa por el punto medio de BE, $M = (0, a/2, a)$, y tiene por dirección la de $\boldsymbol{\Omega}$. Se comprueba que ésta forma 30° con Oz (60° con el plano Oxy) (ver figura).

La velocidad mínima del movimiento o velocidad de deslizamiento es la de los puntos del eje helicoidal, y se calcula proyectando la velocidad de un punto cualquiera sobre la dirección del eje:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_B \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\min} = \frac{a\omega}{2};}$$

esta velocidad está orientada según la dirección del propio eje, por lo que la expresión vectorial es

$$\boldsymbol{v}_{\min} = v_{\min}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_{\min} = \frac{a\omega}{4}(-\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\boldsymbol{k})}$$

3.- El axoide fijo es la superficie reglada de revolución que genera el eje helicoidal obtenido al girar alrededor de Oz. Ésta es, como debe saberse, un *hiperboloide de una hoja* o hiperboloide hiperbólico (de revolución). Su elipse de garganta es la circunferencia de radio $a/2$ situada en el plano de la circunferencia superior (de centro E). Mediante operaciones algebraicas sencillas se puede obtener la ecuación implícita del mismo que es

$$\boxed{x^2 + y^2 - \frac{(z-a)^2}{3} = \frac{a^2}{4}}$$

El axoide móvil es otro hiperboloide igual al anterior pero con el eje de revolución sobre AB, compartiendo en todo instante la generatriz común que es el eje del movimiento helicoidal.