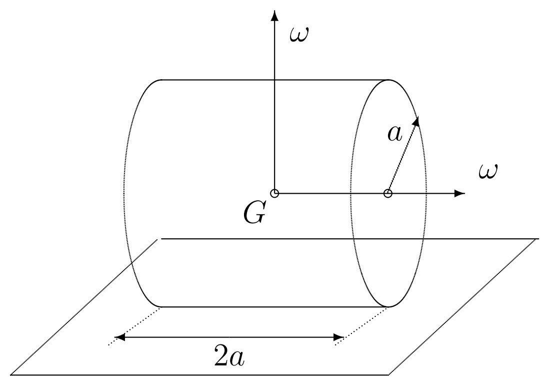
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

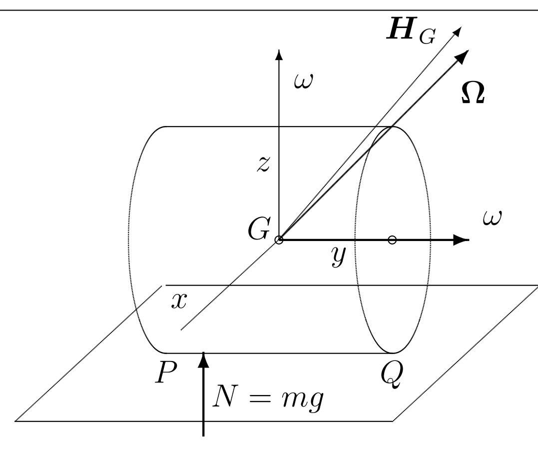
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 45 min.



Un cilindro de sección recta circular con radio a y altura $2a$ se mueve reposando sobre un plano horizontal liso mediante una generatriz de contacto. El cilindro posee en el instante inicial una velocidad angular con componentes iguales ω sobre su propio eje y sobre un eje vertical.

1. momento cinético respecto del centro G en un instante genérico;
2. momento producido en G por la reacción del plano sobre el cilindro, supuesto que ambos permanecen en contacto a lo largo de la generatriz;
3. máximo valor que puede tomar ω para que el cilindro se mantenga en contacto sobre toda la generatriz, sin levantarse por ningún extremo.



1.- Empleamos un triedro de referencia móvil ($Gxyz$) estando Gy según el eje del cilindro, Gz vertical, y Gx horizontal formando un triedro a derechas con los anteriores. En este triedro la velocidad angular inicial tiene las componentes $(0, \omega, \omega)$.
Sea m la masa del cilindro. El momento cinético inicial será $(0, B\omega, C\omega)$, siendo los momentos principales de inercia según Gy y Gz respectivamente $B = (1/2)ma^2$ y $C = (7/12)ma^2$.

En principio este momento cinético podría variar a lo largo del tiempo, aunque siempre dentro del plano vertical Gyz puesto que si la velocidad angular tuviera componente x el cilindro se levantaría del plano por un extremo.

La reacción del plano se produce sobre la generatriz de contacto PQ (ver figura) y produce en el centro G del cilindro un momento $\boldsymbol{M}_G$ en dirección x. Por la ecuación del momento cinético

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G;$$

deducimos pues que la derivada de $\boldsymbol{H}_G$ es constantemente perpendicular al plano Gyz que lo contiene; por lo tanto las componentes de $\boldsymbol{H}_G$ en este plano móvil son constantes, siendo su variación temporal una rotación alrededor del eje Gz.

Por consiguiente en un instante genérico el momento cinético tiene las mismas componentes en el triedro móvil que inicialmente, siendo

$$\boldsymbol{H}_G = ma^2\omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{7}{12}\boldsymbol{k}\right)$$

2.- Al conservarse las componentes del momento cinético en el triedro móvil se conservan también las de $\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}$. La derivada de $\boldsymbol{H}_G$ equivale como se ha dicho a una rotación $\omega\boldsymbol{k}$ por lo que

$$\boldsymbol{M}_G = \omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_G = -\frac{ma^2}{2}\omega^2\boldsymbol{i}$$

3.- Si el momento de la reacción es suficientemente elevado puede llegar a volcar el cilindro, levantándose sobre el plano. Podemos interpretar que la resultante de las reacciones es una fuerza vertical $N = mg$ situada en un punto de la generatriz PQ con coordenada y, de forma que el momento resultante en G sea

$$\boldsymbol{M}_G = (y\boldsymbol{j}) \wedge (mg\boldsymbol{k}) = mgy\boldsymbol{i}$$

comparando las dos expresiones obtenidas para $\boldsymbol{M}_G$ se obtiene

$$y = \frac{-\dfrac{ma^2}{2}\omega^2}{mg} = -\frac{a^2}{2}\frac{\omega^2}{g}$$

El signo negativo indica que la reacción N está desplazada del centro de la generatriz de contacto hacia el punto P. En el límite de vuelco, la reacción estará situada en el extremo P $(y = -a)$ por lo que la velocidad máxima pedida es

$$-a = -\frac{a^2}{2}\frac{\omega^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}}$$