Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

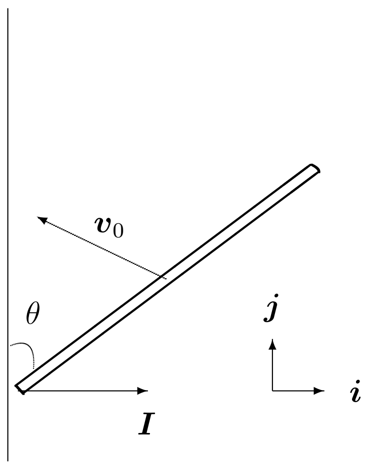
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

Una varilla homogénea de longitud l se mueve en un plano horizontal con velocidad $\boldsymbol{v}_0$ de traslación (sin giro). Impacta por un extremo contra una pared lisa, con la que la varilla forma un ángulo θ, con coeficiente de restitución e. Se pide:

1. Movimiento de la varilla después del choque.
2. Energía cinética de la varilla después del choque.
3. En el caso particular en que $e = 1$ y la velocidad de la varilla sea perpendicular a la pared, determinar el ángulo θ para que la varilla adquiera la máxima velocidad angular posible después del choque.



Sean:

- $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}$ la velocidad del centro de masas de la varilla antes del choque (de acuerdo con el dibujo, sería $v_{0x} < 0$)
- $\boldsymbol{I} = I\boldsymbol{i}$ la impulsión que actúa en el extremo de la varilla que impacta.
- $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ la velocidad del centro de masas de la varilla después del choque.
- $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ la velocidad angular de la varilla después del choque (sentido positivo contrario a las agujas del reloj).

1.- Planteamos las siguientes ecuaciones:

a. Balance de la cantidad de movimiento según x:

$$mv_{0x} + I = mv_x \tag{1}$$

b. Balance de la cantidad de movimiento según y:

$$mv_{0y} = mv_y \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = v_y \tag{2}$$

este resultado indica que la velocidad tangencial a la pared se conserva, ya que en esta dirección no hay percusión.

c. Balance del momento cinético en G (centro de la varilla):

$$I\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}ml^2\omega \tag{3}$$

d. Coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v_x + \omega\frac{l}{2}\cos\theta}{v_{0x}} \tag{4}$$

Despejando I en (1) y sustituyendo en (3) se obtiene:

$$v_{0x} + \frac{1}{6}\frac{l\omega}{\cos\theta} = v_x \tag{5}$$

Resolviendo el sistema (4;5) se obtienen las expresiones de v_x y ω:

$$v_x = \frac{v_{0x}(3\cos^2\theta - e)}{1 + 3\cos^2\theta} \tag{6}$$

$$\omega = -\frac{6v_{0x}(e+1)\cos\theta}{l(1 + 3\cos^2\theta)} \tag{7}$$

Estas dos expresiones anteriores junto con (2) definen el movimiento después del choque.

2.- La energía cinética después del choque es:

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

Sustituyendo las expresiones (2;6;7) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{0x}^2(3\cos^2\theta - e)^2}{(1+3\cos^2\theta)^2} + v_{0y}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\frac{36v_{0x}^2(e+1)^2\cos^2\theta}{l^2(1+3\cos^2\theta)^2}$$

Operando y simplificando, resulta finalmente:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{0x}^2(3\cos^2\theta + e^2)}{1+3\cos^2\theta} + v_{0y}^2\right)$$

3.- En este caso, como $e = 1$ el choque es elástico y la energía total se conserva. Por esta razón, la velocidad angular será máxima cuando $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ sea mínima. Como v_y no varía durante la impulsión, el valor mínimo de v^2 corresponde a $v_x = 0$. Imponiendo esta condición en (6) se obtiene:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 54.74°$$

y sustituyendo en (7):

$$\omega_{\max} = -\frac{2\sqrt{3}v_{0x}}{l}$$

(NOTA: Este resultado se podría haber obtenido también haciendo $d\omega/d\theta = 0$ en la ecuación (7), para calcular directamente el máximo de ω; el resultado es el mismo.)