

Mecánica

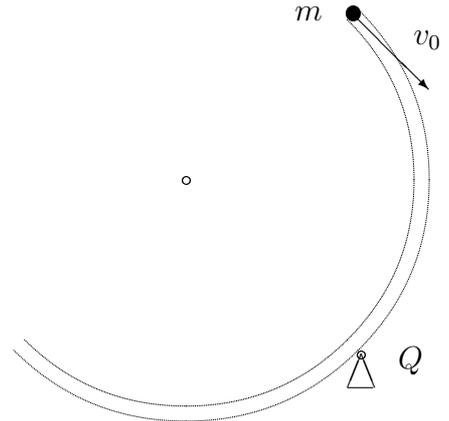
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	Nombre	Nº	Grupo

Ejercicio 5º

Tiempo: 45 min.

Un semicirculo de masa m y radio r se halla en un plano horizontal, con su punto medio Q fijo. Sobre él se mueve con ligadura bilateral lisa una masa puntual m (igual a la del semicirculo). Inicialmente el semicirculo está en reposo y la masa puntual en un extremo del mismo, con velocidad v_0 . Se pide



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
2. Integrales primeras.

El sistema tiene 2 g.d.l., para los que tomaremos como coordenadas el ángulo θ que define la posición de la masa puntual respecto del semicirculo, y el ángulo φ girado por el semicirculo alrededor de Q (positivos ambos en sentido horario).

1.- La energía total se conserva, y al estar el sistema horizontal, coincide con la cinética:

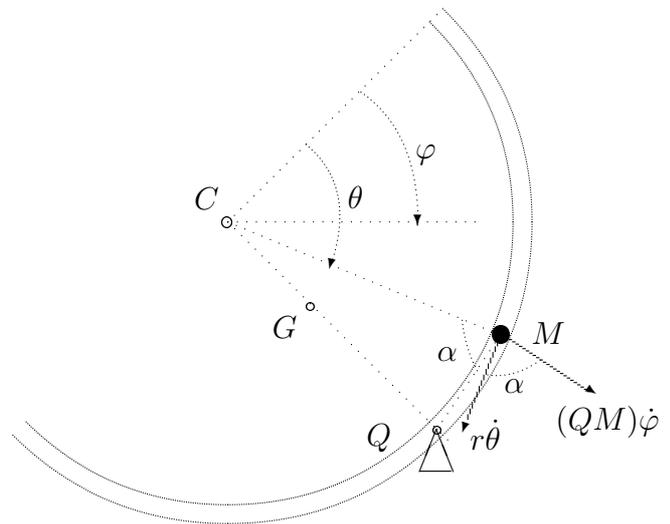
$$E = T = \frac{1}{2}I_Q\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 \quad (1)$$

Resolviendo la geometría de masas se obtiene la posición del C.D.M. (G) y los momentos de inercia:

$$CG = \frac{2r}{\pi};$$

$$I_G = I_C - m(CG)^2 = mr^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right);$$

$$I_Q = I_G + m(QG)^2 = 2mr^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$



La velocidad de la masa puntual se obtiene como composición del arrastre debido al giro φ del semicirculo y la rotación relativa θ . Teniendo en cuenta que ambos vectores forman un ángulo $\alpha = \pi/4 + \theta/2$ y que $QM = 2r \cos \alpha$ (ver figura), la expresión es:

$$v_m^2 = r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + 4r^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

Operando con estas expresiones en (1) e igualando la constante al valor inicial de la energía, resulta

$$\boxed{mr^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left[\dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2(1 - \sin \theta) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}(1 - \sin \theta)\right] = \frac{1}{2}mv_0^2} \quad (2)$$

Por otra parte, se verifica la constancia del momento cinético respecto a Q . Su expresión es

$$\boxed{2mr^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \dot{\varphi} + mr^2 [2\dot{\varphi}(1 - \operatorname{sen} \theta) + \dot{\theta}(1 - \operatorname{sen} \theta)] = mv_0 r} \quad (3)$$

Las dos expresiones anteriores constituyen las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento.

2.- Las integrales primeras son precisamente las ecuaciones (2) y (3) obtenidas en el apartado anterior, por lo que constituyen también la respuesta a este apartado.

OBSERVACIÓN.- Podría haberse resuelto igualmente el ejercicio mediante la dinámica analítica de Lagrange. En este caso, se comprobaría que la Lagrangiana es $L = T$, conservándose la energía T (todas las fuerzas son conservativas, enlaces lisos y esclerónomos) y $\partial L / \partial \dot{\varphi}$ (al ser φ cíclica). Estas dos integrales primeras resultan en las mismas ecuaciones (2) y (3). Puede obtenerse asimismo una ecuación diferencial (de segundo grado) correspondiente a θ :

$$mr^2 \ddot{\theta} + mr^2 \ddot{\varphi}(1 - \operatorname{sen} \theta) + mr^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta = 0.$$