Mecánica

1^er^ EXAMEN PARCIAL (9 de febrero de 1996)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

De un sistema rígido con movimiento plano se conoce la posición de su centro instantáneo de rotación (C.I.R.) en función del tiempo, $\boldsymbol{r}_C(t)$, y la velocidad de rotación Ω. *Deducir* razonadamente para un instante dado la expresión de la aceleración del punto del sólido que se sitúa en el C.I.R. (2.5 ptos.)

La velocidad de un punto cualquiera definido por el vector posición $\boldsymbol{r}$ es una rotación alrededor de C; denominando $\boldsymbol{k}$ al versor normal al plano,

$$\boldsymbol{v} = \Omega\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_C).$$

Derivando se obtiene directamente el campo de aceleraciones,

$$\boldsymbol{a} = \dot{\Omega}\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_C) + \Omega\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_C),$$

donde $\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C$ es la "velocidad de sucesión" de C (dicho así para enfatizar que C es un punto geométrico que no coincide necesariamente con el mismo punto del sólido a lo largo del movimiento).

El punto del sólido que se sitúa en C es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C$, siendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$; particularizando en la expresión anterior,

$$\boxed{\boldsymbol{a} = -\Omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{v}_C.}$$

Demostrar, desde un punto de vista puramente analítico, que si la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo existe siempre una constante del movimiento cuya expresón se deducirá. ¿Qué relación guarda esta constante con la energía? (2.5 ptos.)

Sean q_j las coordenadas generalizadas, $\dot{q}_j$ las velocidades y t el tiempo. Según el enunciado $\partial L/\partial t = 0$; la dependencia funcional de la función Lagrangiana es pues $L(q_j, \dot{q}_j)$, por lo que aplicando la regla de la cadena su derivada temporal es

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Lagrange, $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_j) = \partial L/\partial q_j$. Por tanto los sumandos primero y tercero en la ecuación anterior se anulan, resultando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = h \quad \text{(cte.)}$$

La constante obtenida se denomina *integral de Jacobi*. Se comprueba fácilmente que si no existen enlaces móviles, en cuyo caso la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en las velocidades generalizadas, h coincide con la energía mecánica $T + V$.

Deducir razonadamente la ecuación horaria del movimiento para un oscilador armónico de masa m y constante de resorte k, sin amortiguamiento, en vibraciones libres, en función de las condiciones iniciales ($x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$). (2.5 ptos.)

La ecuación del movimiento es $m\ddot{x} + kx = 0$. Admitiendo una solución general de tipo exponencial, $x(t) = ae^{rt}$, con coeficientes a y r reales o complejos, al introducir en la ecuación:

$$ae^{rt}(mr^2 + k) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega_0$$

donde se ha supuesto $k > 0$ e $i = \sqrt{-1}$. Desarrollando la exponencial compleja resulta una expresión armónica cuyas constantes A y B deben ser reales (puesto que lo es el movimiento):

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + ai\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t).$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtienen los valores de las constantes:

$$x(0) = A \quad \Rightarrow \quad A = x_0; \qquad \dot{x}(0) = B\omega_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Por lo que la expresión final en función de las condiciones iniciales es

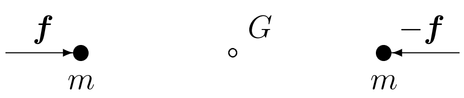
$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t).}$$

Discutir, para un sistema material general de N partículas, si las ecuaciones de la cantidad de movimiento ($\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_G$) y del momento cinético ($\boldsymbol{M}_G = d/dt(\boldsymbol{H}_G)$) son necesarias y suficientes para definir el movimiento. (2.5 ptos.)

Las ecuaciones vectoriales citadas se cumplen siempre (son *necesarias*) al ser la expresión de los principios generales de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

Sin embargo, proporcionan sólo 6 ecuaciones escalares, por lo que no podrán ser suficientes si el número de grados de libertad es > 6.

Existen además otros casos con menos de 6 g.d.l. en que las ecuaciones citadas pueden no ser suficientes: aquellos sistemas no rígidos que permitan movimientos relativos entre las partículas, como el descrito en la figura adjunta.



En este caso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$, sin embargo no se puede determinar el movimiento relativo de las dos partículas conociendo únicamente los valores de las resultantes de fuerzas y momentos. Es preciso conocer la magnitud de las fuerzas $\boldsymbol{f}$ sobre cada una de ellas.

Las ecuaciones citadas son *suficientes* sólo en el caso de sistemas rígidos (6 g.d.l.), en los que no hay desplazamientos relativos entre las partículas.

En el caso más general sería necesario aplicar las ecuaciones

$$\boldsymbol{f}_i = m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

para cada una de las partículas del sistema, siendo $\boldsymbol{f}_i$ la resultante de las fuerzas sobre m_i.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1$^{\underline{er}}$ EXAMEN PARCIAL (9 de febrero de 1996)

BORRADOR