

Mecánica

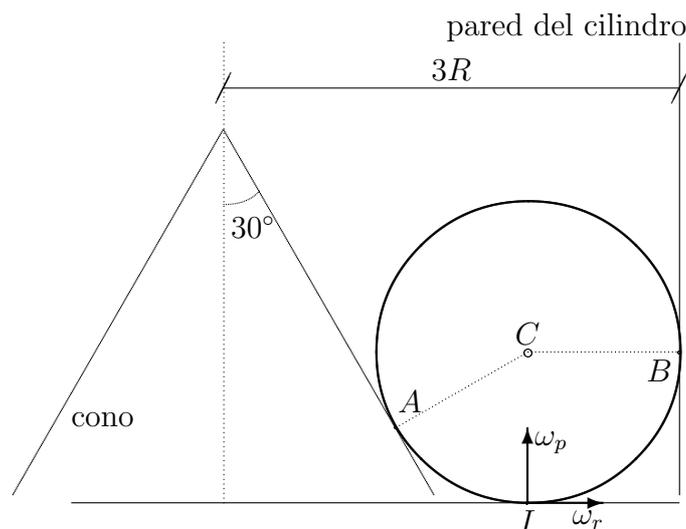
1^{er} EXAMEN PARCIAL (9 de febrero de 1996)

Apellidos	Nombre	Nº	Grupo

Ejercicio 4º

Tiempo: 60 min.

En el sistema mecánico de la figura (correspondiente a un rodamiento de bolas) el cilindro de radio interior $3R$ y el cono de semiángulo 30° son coaxiales y giran respecto de su eje independientemente. Entre los dos está encajada una esfera de radio R que rueda sin deslizarse sobre el plano fijo inferior, apoyándose asimismo en el cono y en el cilindro sin deslizamiento. El movimiento de éstos es tal que los puntos de contacto A y B tienen constantemente velocidades $-V$ y $+V$ respectivamente (positivas en sentido hacia fuera del plano del papel). Se pide, justificando adecuadamente:



1. describir el movimiento, discutiendo si el eje del movimiento helicoidal tangente corta al eje del cono en un punto fijo y definiendo los axoides;
2. velocidades angulares de rodadura y pivotamiento de la esfera sobre el plano inferior, así como la velocidad del centro (C) de ésta;
3. aceleración angular de la esfera;
4. aceleración del punto de la esfera en contacto con el plano;

1.- El movimiento de la esfera está definido mediante la rodadura sin deslizamiento en tres puntos distintos: A , B e I . La velocidad de los puntos de la esfera en contacto es igual que la de los puntos de las superficies tangentes respectivas: $-V$, $+V$ y 0 .

El movimiento instantáneo es una rotación alrededor de un eje que pasa por I , al anularse la velocidad de este punto. Si el eje instantáneo de rotación fuese paralelo al eje común de cono y cilindro la velocidad de los puntos A y B sería distinta en módulo; por tanto debe tener una cierta inclinación respecto del eje de revolución cortando a éste en un punto fijo, ya que las sucesivas posiciones y campos de velocidades de la esfera se obtienen por revolución alrededor del eje del cono. Llamaremos V a este punto.

El axoide fijo es por tanto un cono, de eje el común a cono y cilindro y generatriz VI . Para caracterizar el axoide móvil observamos que el eje de rotación VI forma siempre el mismo ángulo con VC , por lo que el lugar geométrico buscado es un cono de eje VC y generatriz VI .

2.- Emplearemos un triedro $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, siendo \mathbf{i} horizontal, \mathbf{j} vertical y \mathbf{k} normal al papel (hacia fuera). El vector velocidad de rotación será $\boldsymbol{\Omega} = \omega_r \mathbf{i} + \omega_p \mathbf{k}$. Las velocidades de los puntos A y B son

$$\begin{aligned} v_A &= -V = \omega_r \frac{R}{2} + \omega_p R \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ v_B &= +V = \omega_r R - \omega_p R. \end{aligned}$$

Despejando entre estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_p &= -\frac{V}{R} \frac{3}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{V}{R} \frac{3}{2} (\sqrt{3} - 1); \\ \omega_r &= -\frac{V}{R} \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{V}{R} \frac{1}{2} (3\sqrt{3} - 5). \end{aligned} \quad (1)$$

Una vez conocida $\boldsymbol{\Omega}$, La velocidad de C se calcula inmediatamente:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{IC} \quad \Rightarrow \quad v_C = \omega_r R = -\frac{V}{2} (3\sqrt{3} - 5); \quad (2)$$

puesto que ω_r es negativo (es decir, sentido distinto al representado en la figura), la velocidad de C es hacia dentro del papel.

El ángulo α que forma $\boldsymbol{\Omega}$ con el eje de revolución viene dado por $\tan \alpha = \omega_r / \omega_p = (2 - \sqrt{3})/3$. El punto fijo V está situado por debajo del plano horizontal a una distancia igual a $2R / \tan \alpha = 6R / (2 - \sqrt{3})$.

3.- El vector $\boldsymbol{\Omega}$ gira a lo largo del movimiento alrededor del eje de revolución del sistema, con una cierta velocidad $\omega \mathbf{j}$. Para calcular ésta observamos que el centro C de la esfera describe una circunferencia alrededor del eje de revolución, con la velocidad v_C calculada antes (2). Por tanto $\omega = v_C / (2R) = \omega_r / 2$. La aceleración angular es pues

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega \mathbf{j} \wedge (\omega_r \mathbf{i} + \omega_p \mathbf{j}) = \frac{\omega_r^2}{2} \mathbf{k} = \frac{V^2}{R^2} \frac{26 - 15\sqrt{3}}{4}. \quad (3)$$

4.- Aplicaremos la expresión de la aceleración a partir del punto C cuyo movimiento es conocido:

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{CI} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CI}).$$

Considerando que $\mathbf{a}_C = -2R\omega^2 \mathbf{i} = -R(\omega_r^2/2)\mathbf{i}$; $\mathbf{CI} = -R\mathbf{j}$; y los valores de $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ definidos en (1) y (3), sustituyendo en la expresión anterior resulta

$$\mathbf{a}_I = -R\omega_r\omega_p \mathbf{i} + R\omega_r^2 \mathbf{j}$$

y operando,

$$\mathbf{a}_I = \frac{V^2}{2R} \left[-(21 - 12\sqrt{3})\mathbf{i} + (26 - 15\sqrt{3})\mathbf{j} \right].$$