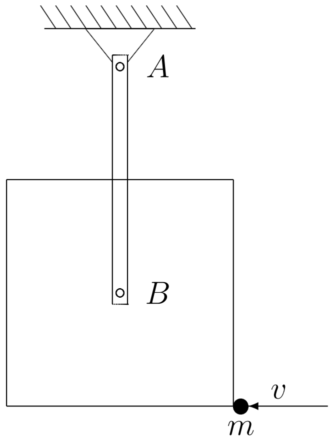
Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (10 de Junio de 1996)

Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 3º (10 ptos.) Tiempo: 50 min.

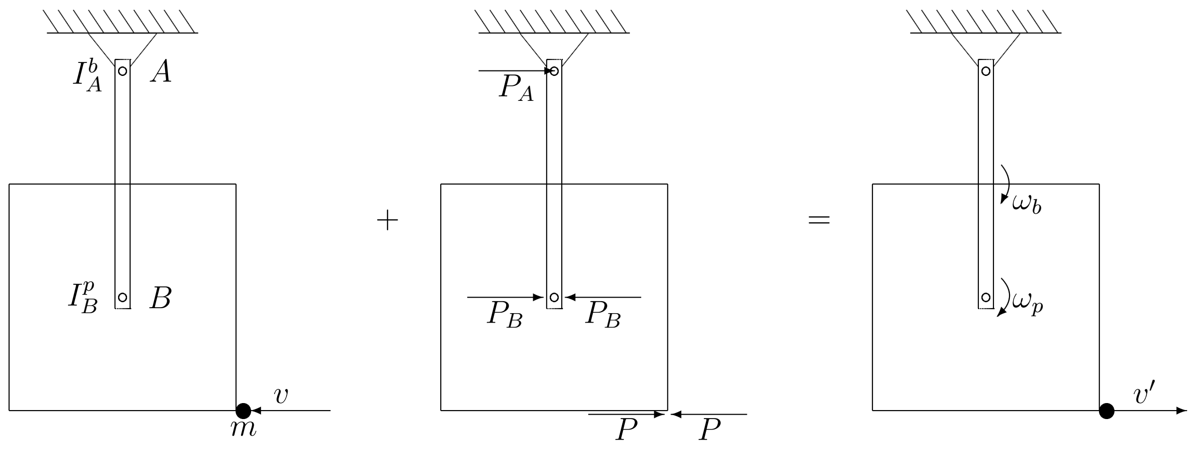
El sistema plano de la figura está formado por una barra AB homogénea y pesada de masa m y longitud $2a$ y una placa cuadrada pesada de masa m y lado $2a$. La barra está articulada en A a un punto fijo y en B al centro de la placa. En un instante determinado el sistema se encuentra en reposo en la posición de equilibrio de mínima energía potencial, estando el cuadrado orientado con un lado horizontal. Una partícula de masa m y velocidad horizontal v impacta elásticamente contra un borde vertical de la placa en su extremo inferior, pudiendo suponerse que la percusión que se produce es horizontal.



Se pide:

1. Movimiento del sistema en el instante inmediatamente posterior a la percusión;
2. Percusiones reactivas que aparecen en A y B;
3. Posición más alta que alcanza el sistema después de la percusión.

1.- El balance cinético en la percusión se indica esquemáticamente en la figura:



El movimiento después de la percusión queda determinado por las incógnitas (ω_b, ω_p, v'), para las que se toman como positivos los sentidos indicados en la figura. Expresamos en primer lugar el balance del momento cinético del conjunto (placa, barra y partícula) en el punto A, de forma que la única percusión exterior a este sistema (P_A) no interviene:

$$-3amv = 3amv' - 2am(2a\omega_b) - I_B^p\omega_p - I_A^b\omega_b$$

donde $I_B^p = \frac{2}{3}ma^2$ es el momento de inercia de la placa cuadrada en su centro e $I_A^b = \frac{4}{3}ma^2$ el de la barra en el extremo A. Resulta así la ecuación

$$3am(v+v') = \frac{16}{3}ma^2\omega_b + \frac{2}{3}ma^2\omega_p \tag{1}$$

Por otra parte expresamos el balance de momento cinético para el subsistema formado por la placa y la partícula, en el punto B, de forma que la percusión P_B exterior a este sistema no dé momentos:

$$-\,amv = amv' - \frac{2}{3}ma^2\omega_p \tag{2}$$

Por último, debe establecerse la ecuación que define el coeficiente de restitución ($e = 1$):

$$v = v' + 2a\omega_b + a\omega_p \tag{3}$$

Resolviendo las tres ecuaciones (1), (2) y (3) resulta:

$$\boxed{\omega_p = \frac{12}{13}\frac{v}{a}; \quad \omega_b = \frac{3}{13}\frac{v}{a}; \quad v' = -\frac{5}{13}v}$$

queriendo decir el signo negativo para v' que ésta toma sentido contrario al dibujado arriba.

2.- En función de las variables ya conocidas, la percusión reactiva P_A se puede calcular expresando el balance de cantidad de movimiento para el sistema conjunto:

$$-mv + P_A = -m(2a\omega_b) - m(a\omega_b) + mv'$$

Planteando el balance de momento cinético para la barra en A se obtiene la percusión reactiva entre barra y placa P_B:

$$2aP_B = \frac{4}{3}ma^2\omega_b$$

Y por último, la percusión P sobre la partícula se obtiene expresando el balance de momento cinético para ésta:

$$-mv + P = mv'$$

Sustituyendo los valores anteriormente calculados para (ω_b, ω_p, v') resulta

$$\boxed{P_A = -\frac{1}{13}mv; \quad P_B = \frac{2}{13}mv; \quad P = \frac{8}{13}mv}$$

3.- Establecemos la conservación de la energía entre el instante posterior al choque y el de máxima altura para el punto B. La velocidad de rotación ω_p de la placa se conserva, al no existir ningún momento sobre su centro B:

$$\frac{1}{2}m(2a\omega_b)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}ma^2\right)\omega_p^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ma^2\right)\omega_b^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}ma^2\right)\omega_p^2 + mg2a(1-\cos\theta) + mga(1-\cos\theta)$$

siendo θ el ángulo que forma la barra AB con la vertical. Despejando y sustituyendo los valores antes calculados,

$$\boxed{\cos\theta = 1 - \frac{8}{169}\frac{v^2}{ga}}$$