Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (10 de Junio de 1996)

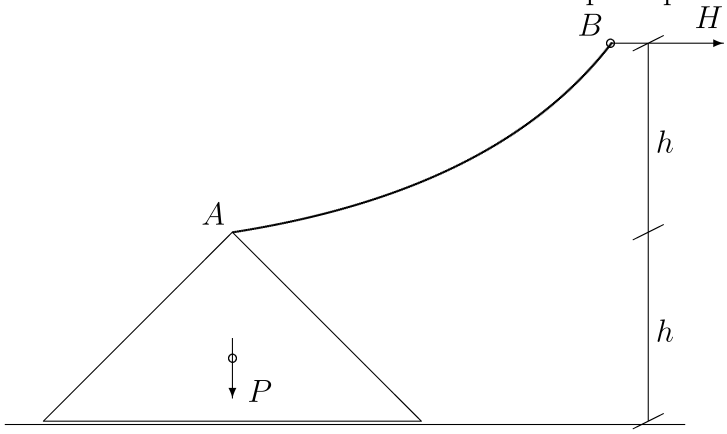
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

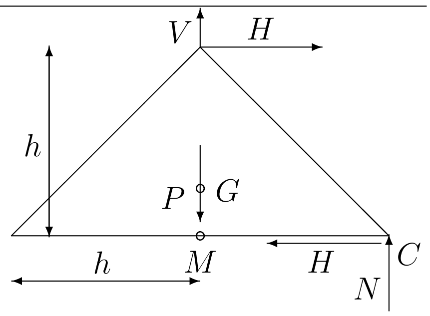
Ejercicio 4º (10 ptos.) Tiempo: 50 min.

Un cono de peso P, semiángulo cónico 45° y altura h está apoyado por su base sobre un plano horizontal rugoso. El vértice está sujeto a un cable flexible AB de longitud $2h$ y peso total P, a través del cual se tira del cono desde el extremo B, situado a una altura fija h sobre el vértice, intentando desplazarlo horizontalmente.

Se pide:

1. Máximo valor del coeficiente de rozamiento para que el cono no llegue a volcar
2. Suponiendo que el rozamiento es la mitad del calculado en el apartado anterior, valor del esfuerzo horizontal H que debe ejercerse desde B para que el cono comience a moverse; calcular asimismo en esta situación la tensión máxima que soporta el cable.





1.- El cable ejerce sobre el vértice del cono unos esfuerzos H (horizontal) y V (vertical). La reacción normal del plano es pues $N = P - V$, mientras que la horizontal es H. Al tirar del cable y aumentar H paulatinamente, el equilibrio se puede romper de una de las dos maneras siguientes:

1. *por vuelco;* expresando el equilibrio de momentos en el centro de la base (M), para que el cono no vuelque el momento activo producido por H debe ser equilibrado por el momento pasivo debido a la reacción N, que puede desplazarse hacia la derecha hasta situarse como máximo en el vértice C:

$$Hh \leq Nh$$

   En el límite de vuelco es por tanto $H = N$.

2. *por deslizamiento;* en general se verifica

$$H \leq \mu N;$$

   si el cono desliza, se verifica $H = \mu N$.

El máximo valor que puede tomar μ para que el cono no vuelque corresponde por tanto al valor de $H = \mu N$, en el límite de vuelco:

$$\mu N = N; \quad \Rightarrow \quad \mu_{\max} = 1$$

Si $\mu < \mu_{\max}$ el equilibrio se rompe por deslizamiento, mientras que si $\mu > \mu_{\max}$ se rompe por vuelco.

2.- El cable forma una catenaria, de la cual podemos expresar inmediatamente dos ecuaciones. En primer lugar, la diferencia de cotas entre A y B:

$$\underbrace{a\cosh\frac{x_B}{a}}_{z_B} - \underbrace{a\cosh\frac{x_A}{a}}_{z_A} = h; \tag{1}$$

por otra parte, la longitud del hilo entre A y B:

$$\underbrace{a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a}}_{s_B} - \underbrace{a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}}_{s_A} = 2h; \tag{2}$$

donde se emplea la notación $(s_A,\, s_B)$ para indicar el arco de catenaria medido desde el vértice de la misma hasta los puntos A y B respectivamente.

Las incógnitas del problema son $(a,\, x_A,\, x_B)$. La ecuación que falta se obtiene expresando la condición de deslizamiento en el cono, teniendo en cuenta que $V = qa\,\mathrm{senh}(x_A/a)$ y $H = \mu(P - V)$:

$$qa = \mu\left(P - qa\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}\right) = \mu(P - qs_A) \tag{3}$$

Considerando que $\cosh^2(x_A/a) = 1 + \mathrm{senh}^2(x_A/a)$ (o equivalentemente, $z_A^2 = a^2 + s_A^2$), y sustituyendo los datos del enunciado ($P = 2hq$, $\mu = 1/2$), las ecuaciones (1) y (2) se convierten en

$$a\cosh\frac{x_B}{a} - \sqrt{a^2 + (2h-2a)^2} \quad = \quad h; \tag{4}$$

$$a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a} - (2h - 2a) \quad = \quad 2h; \tag{5}$$

y combinando a su vez los cuadrados de las funciones hiperbólicas en estas dos ecuaciones se obtiene

$$a^2 = \left[h + \sqrt{a^2 + (2h-2a)^2}\right]^2 - [2h + (2h - 2a)]^2$$

Desarrollando esta expresión y eliminando la raíz cuadrada se obtiene finalmente la siguiente ecuación cuadrática en función de a:

$$44a^2 - 144ha + 105h^2 = 0 \tag{6}$$

que admite en principio dos soluciones,

$$a = \frac{36h \pm \sqrt{141}h}{22} = \begin{cases} 2.1761h \\ 1.0966h \end{cases} \tag{7}$$

Analicemos ahora la admisibilidad de las soluciones obtenidas. Sustituyendo la solución (7_1) en (3) se deduce

$$s_A = 2h - 2a = 2h(1 - 2.1761); \quad V = qs_A = (1 - 2.1761)P$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{x_A}{a} &= \operatorname{argsenh}\frac{s_A}{a} = -0.9375; & z_A &= a\cosh\frac{x_A}{a} = 3.2044h \\ \frac{x_B}{a} &= \operatorname{argsenh}\frac{s_A + 2h}{a} = -0.1612; & z_B &= a\cosh\frac{x_B}{a} = 2.2044h \end{aligned}$$

Como vemos esta solución no es válida, ya que resulta $z_B - z_A = -h$, en contradicción con la ecuación (1). (Esta solución espúrea se ha introducido al elevar al cuadrado las ecuaciones para reducirlas).

Por el contrario, para la solución (7_2), realizando las mismas comprobaciones se deduce:

$$\begin{aligned} s_A &= 2h(1 - 1.0966); & V &= (1 - 1.0966)P \\ \frac{x_A}{a} &= \operatorname{argsenh}\frac{s_A}{a} = -0.1753; & z_A &= a\cosh\frac{x_A}{a} = 1.1135h \\ \frac{x_B}{a} &= \operatorname{argsenh}\frac{s_A + 2h}{a} = 1.2739; & z_B &= a\cosh\frac{x_B}{a} = 2.1135h \end{aligned}$$

Por lo que esta solución es válida, correspondiendo a una catenaria con el vértice situado entre los puntos A y B.