Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (28 de Junio de 1996)

Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Definición de fuerza central. Si una partícula se mueve bajo una fuerza central, ¿qué magnitud cinética se conserva? Como consecuencia inmediata, deducir dos características importantes del movimiento. (2.5 ptos.)

Es aquélla cuya recta de acción pasa en todo instante por un punto dado O; Si está aplicada a una partícula de masa m sita en P, llamando $\boldsymbol{r} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{OP}$, debe poder expresarse como $\boldsymbol{F} = F\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. Expresando el momento cinético y derivando:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \wedge m\dot{\boldsymbol{r}}; \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \wedge m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O = \overrightarrow{\text{cte}}.$$

1. al ser *constante de la dirección* de $\boldsymbol{H}_O$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ pertenece a un plano fijo, normal a esta dirección, por lo que el movimiento es plano;
2. al ser *constante el módulo* H_O, la velocidad areolar dS/dt es constante; en efecto,
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}| = \frac{1}{2m}H_O$$

Si midiésemos con exactitud la caída de un grave partiendo del reposo respecto de la tierra, ¿qué desviaciones encontraríamos respecto de la caída vertical? ¿a qué son debidas? (2.5 ptos.)

Debido a la rotación de la tierra (Ω, en dirección $S - N$) un sistema de referencia ligado a la superficie de la tierra no es inercial, por lo que deben considerarse fuerzas de inercia que producen las alteraciones siguientes:

1. La plomada o dirección aparente de la gravedad queda desviada respecto de la vertical geométrica (radial), por efecto de la fuerza de arrastre centrífuga; el valor de ésta es, siendo R el radio de la tierra, en un punto de latitud λ, $F_{\text{arr}} = m\Omega^2 R\cos\lambda$, dirigida desde el eje $N - S$ de rotación. El efecto sobre la gravedad en el ecuador es máximo en módulo aunque mínimo en dirección.

2. Desviación de la caída por el efecto de la fuerza de inercia de Coriolis sobre el cuerpo en movimiento relativo. Esta fuerza tiene la expresión $\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}}$, por lo que si $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ es vertical descendente la desviación es hacia el Este.

Expresión del teorema de König (energía cinética de un sistema como función del movimiento del C.D.M. y el relativo). *Aplicar* al siguiente caso: 2 masas puntuales iguales (m) sobre una recta fija, cuyo punto medio es x_G y su distancia d. (2.5 ptos.)

Sea un sistema formado por un conjunto de masas puntuales $\{m_i, i = 1 \dots N\}$, $M = \sum_{i=1}^N m_i$ su masa total, y v_G la velocidad de su centro de masas G. La energía cinética se puede expresar como suma de la que tendría una partícula de masa M móvil con G y la del movimiento relativo a G:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \nu_i^2,$$

donde ν_i son las velocidades relativas a G.

Aplicación:

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\left[m \left(\frac{\dot{d}}{2} \right)^2 + m \left(\frac{\dot{d}}{2} \right)^2 \right] = m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{4} m\dot{d}^2,$$

que como comprobación vemos que coincide con el cálculo directo de T,

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_G + \frac{\dot{d}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_G - \frac{\dot{d}}{2} \right)^2$$

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un sólido que en un cierto instante tienen velocidad mínima? ¿Cómo evoluciona este lugar, descrito según una referencia ligada al sólido, a lo largo del movimiento? (2.5 ptos.)

El campo de velocidades del sólido, en función de la velocidad de un punto arbitrario O tomado como origen y de la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$. Se observa inmediatamente que el término $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$ es normal a $\boldsymbol{\Omega}$, por lo que la velocidad mínima corresponderá a los puntos en que ésta sea paralela a $\boldsymbol{\Omega}$. Este lugar geométrico define una recta denominada *eje instantáneo del movimiento helicoidal tangente*.

Es inmediato comprobar que la velocidad de todos los puntos del eje es igual (velocidad mínima). Si ésta es nula, el movimiento corresponde a una rotación alrededor del eje; en caso contrario, el movimiento tiene además una componente de traslación o deslizamiento en dirección del eje, como un sacacorchos.

A lo largo del tiempo, el eje ocupa distintas posiciones en el espacio. En una referencia ligada al sólido, describe una superficie reglada denominada *axoide móvil*. A su vez, si se observa desde una referencia fija, describiría otra superficie denominada *axoide fijo*. El axoide móvil evoluciona a lo largo del tiempo moviéndose con el sólido (como es lógico) manteniéndose tangente al axoide fijo a través de todos los puntos de la generatriz de contacto (eje del movimiento común a ambos), con un movimiento de rodadura y deslizamiento según dicho eje.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (28 de Junio de 1996)

BORRADOR