Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (28 de Junio de 1996)

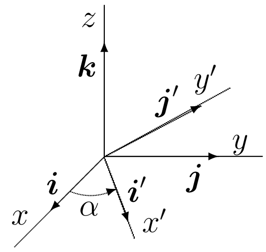
Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta.* Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Obtener las matrices de transformación para los versores de un triedro $Oxyz$ debidas a: a) rotación α alrededor de Oz; b) rotación β alrededor de Ox. ¿Qué característica principal tienen estas matrices? Si se realizan sucesivamente estas dos rotaciones, *discutir* si el resultado depende o no del orden en que se efectúan. (4.0 ptos.)

a) Proyectando, se obtienen las relaciones entre los versores:

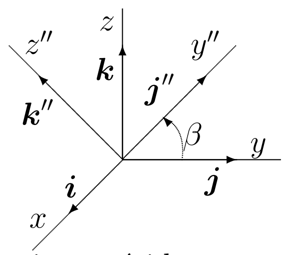


$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}' &= -\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

por lo que la matriz de transformación es

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{matrix}\right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{R}_{z(\alpha)}} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{matrix}\right\}$$

b) En este caso la transformación resulta:



$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{i}'' \\ \boldsymbol{j}'' \\ \boldsymbol{k}'' \end{matrix}\right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}}_{\mathsf{R}_{x(\beta)}} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{matrix}\right\}$$

Tanto R_z como R_x son matrices ortogonales, al corresponder a rotaciones rígidas que mantienen las distancias:

$$\mathsf{R}_z^{-1} = \mathsf{R}_z^{\mathrm{T}}; \quad \mathsf{R}_x^{-1} = \mathsf{R}_x^{\mathrm{T}}.$$

Dos rotaciones sucesivas equivalen al producto de las matrices de transformación, operación que *no es conmutativa* como se puede comprobar fácilmente. El producto vuelve a ser una matriz ortogonal de rotación.

Partiendo de la ecuación diferencial del equilibrio de un hilo flexible, siendo este homogéneo y sometido únicamente a su propio peso, *deducir* el valor de la tensión en un punto cualquiera del mismo de ordenada z. (3.0 ptos.)

En un hilo sometido a su peso propio (carga $-q\boldsymbol{k}$ por unidad de longitud), siendo $\boldsymbol{T}$ la tensión y s el arco,

$$d\boldsymbol{T} - q\boldsymbol{k}\, ds = \boldsymbol{0};$$

multiplicando escalarmente por el versor tangente $\boldsymbol{t} = d\boldsymbol{s}/ds$,

$$dT - q\, dz = 0,$$

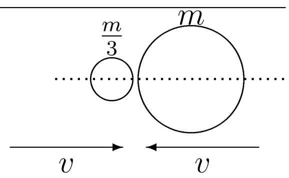
e integrando

$$T - T_0 = qz.$$

Siendo T_0 el valor de T para $z = 0$. Es posible elegir el origen de z de forma que sea $T_0 = 0$, por lo que en este caso será

$$\boxed{T = qz}$$

Dos esferas de masas $m/3$ y m chocan elásticamente, con velocidades $+v$ y $-v$ respectivamente según la recta de los centros. *Obtener* la velocidad de la esfera pequeña después del choque y discutir la variación o no de su energía cinética. (3.0 ptos.)



Sean (v_1, v_2) las velocidades adquiridas por $m/3$ y m respectivamente, tomadas positivas hacia la derecha. Escribimos las relaciones de conservación de cantidad de movimiento y del coeficiente de restitución ($e = 1$):

$$\frac{m}{3}v - mv = \frac{m}{3}v_1 + mv_2, \quad (1)$$

$$2v = -v_1 + v_2; \quad (2)$$

solucionando estas dos ecuaciones resulta

$$v_1 = -2v; \quad v_2 = 0.$$

Es decir, la esfera pequeña rebota con el doble de velocidad que inicialmente, mientras la grande se queda parada. La energía de la esfera pequeña se multiplica por 4 respecto a la inicial, puesto que "roba" energía a la esfera grande; sin embargo, al ser el impacto elástico, la energía conjunta de las dos se conserva, siendo su valor $\frac{2}{3}mv^2$.