Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Definir el sistema de Referencia del Centro de Masa (CDM). *Demostrar* la igualdad de las expresiones del teorema del momento cinético respecto del CDM con velocidades absolutas y relativas al CDM. (5 ptos.)

La posición del CDM de un sistema de partículas $\{m_i,\ i=1,\dots N\}$ es:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{r}_i}{M},$$

siendo $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la masa total. El sistema de referencia del CDM se define respecto de un sistema inercial como aquél que se traslada siguiendo el movimiento del CDM, sin experimentar rotación ninguna respecto del sistema inercial. Las posiciones y velocidades respecto al sistema del CDM son por tanto $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G$ y $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_G$.

El teorema del momento cinético se cumple tomando momentos respecto del CDM,

$$\boldsymbol{H}_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i,$$

a pesar de no ser éste un punto fijo:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} &= \overbrace{\sum \dot{\boldsymbol{r}}_i \wedge m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i}^{=\boldsymbol{0}} - \overbrace{\dot{\boldsymbol{r}}_G \wedge \underbrace{\sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i}_{M\dot{\boldsymbol{r}}_G}}^{=\boldsymbol{0}} + \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_G \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{M}_G$ es el momento resultante en G de las fuerzas exteriores al sistema.

Si el observador está ligado al sistema de referencia del CDM, el momento cinético se debe expresar tomando también velocidades relativas al CDM:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_G^{SCM} &= \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i (\dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{r}}_G) \\ &= \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i - \underbrace{\sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) m_i}_{=\boldsymbol{0}} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_G = \boldsymbol{H}_G \end{aligned}$$

Comprobamos pues que el momento cinético tiene el mismo valor con velocidades absolutas o relativas al CDM. Por tanto la derivada tiene también igual valor y el teorema del momento cinético respecto del CDM tiene igual expresión.

Deducir la expresión de la energía de una masa puntual m en su movimiento en una órbita gravitatoria. *Clasificar* las posibles trayectorias en función del valor de la energía (2.5 ptos.) (observación: la ecuación en polares de una órbita cónica es $r = p/(1+e\cos\varphi)$, y la constancia de velocidad areolar arroja $r^2\dot{\varphi} = \sqrt{GMp}$).

La energía total se expresa como $E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - GMm/r$, donde se toma nula la energía potencial en $r = \infty$. La energía total se conserva, por lo que podemos obtenerla particularizando en el perigeo (punto más cercano al foco) donde $\dot{r} = 0$ y $\varphi = 0$:

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\frac{GMmp}{r^2} - \frac{GMm}{r}$$

donde se ha empleado la relación de la constancia de las velocidad areolar. Sustituyendo $r = p/(1+e)$ resulta finalmente

$$E = \frac{1}{2}GMm\frac{(1+e)}{p}(1+e-2) = -\frac{1}{2}GMm\frac{1-e^2}{p}$$

deduciéndose la clasificación de las órbitas siguiente:

- $e < 1$, elipse, corresponde a $E < 0$ (órbita cerrada, movimiento acotado).
- $e = 1$, parábola, corresponde a $E = 0$ (caso límite, $r \to \infty$).
- $e > 1$, hipérbola, corresponde a $E > 0$ (trayectoria no acotada, $r \to \infty$).

Enunciar los Principios de trabajos virtuales y D'Alembert, para un sistema con enlaces lisos. (2.5 ptos.)

El *Principio de los trabajos virtuales* expresa una condición necesaria y sufiente para el equilibrio de un sistema. Si todos los enlaces son lisos, el trabajo de las fuerzas aplicadas (es decir, excluyendo las reacciones) para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces ($\delta\boldsymbol{r}_i$) debe ser nulo:

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\} \text{ compatible},$$

donde $\boldsymbol{f}_i$ son las fuerzas activas o aplicadas. Análogamente, el *Principio de D'Alembert* establece una condición necesaria y suficiente para determinar la dinámica del sistema, expresada como

$$\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\} \text{ compatible}.$$