ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

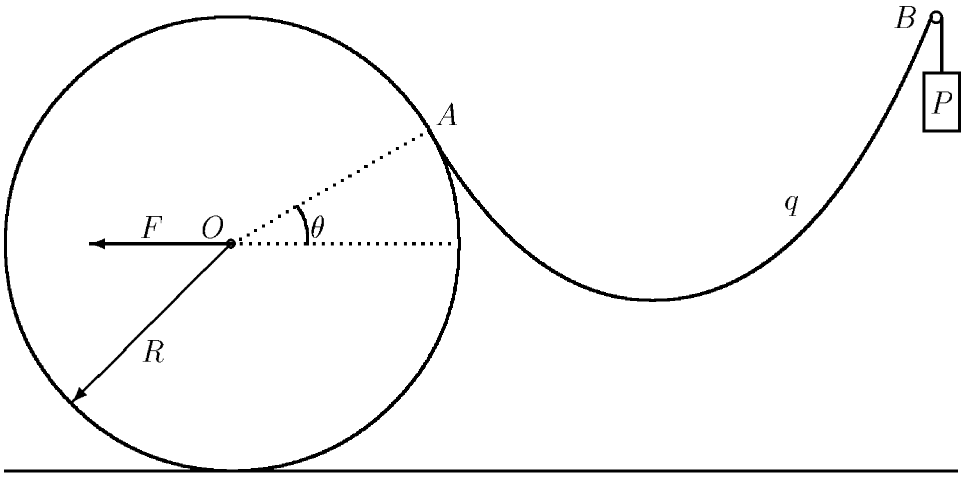
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

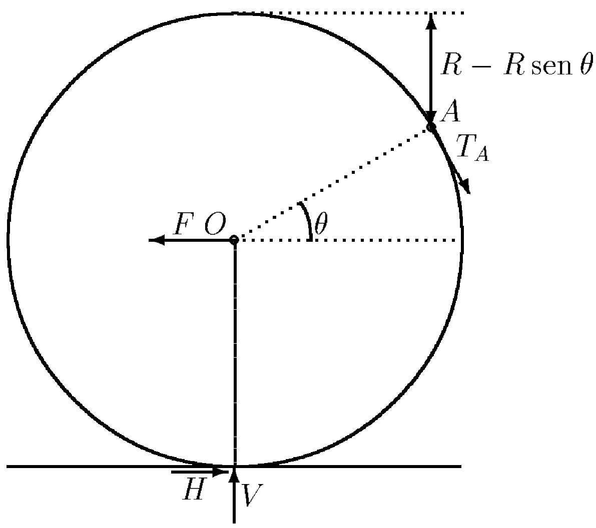
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 6º Tiempo: 60 min.

Un hilo flexible tiene un extremo fijado sobre el perímetro de un disco vertical de radio R, sobre el que se enrolla al girar el disco, pudiéndose despreciar el rozamiento entre disco e hilo. El disco a su vez rueda sin deslizar apoyado sobre una recta horizontal. El otro extremo del hilo pasa por una pequeña polea B sin rozamiento, situada a una altura $2R$ sobre la recta horizontal, colgando de él un contrapeso de valor P. Sobre el eje del disco se aplica una fuerza horizontal $F = 9P/8$ de forma que el conjunto esté en equilibrio. El hilo es homogéneo y de peso por unidad de longitud $q = P/(2R)$, pudiéndose despreciar el peso del hilo que cuelga entre la polea B y el contrapeso P, así como el que está enrollado sobre el disco. Se pide:

1. posición angular (θ) del punto A en el que se separa el hilo del perímetro del disco;
2. configuración de equilibrio del hilo, definiendo completamente la curva que forma;
3. calcular la distancia horizontal entre el centro del disco y la polea B, así como la altura del punto más bajo del hilo sobre la recta horizontal.





1.- Establecemos el equilibrio de momentos sobre el disco en el punto de contacto con la recta horizontal:

$$FR = T_A R(1 + \operatorname{sen}\theta) \qquad (1)$$

La tensión T_A se puede calcular a partir de la tensión conocida en el otro extremo ($T_B = P$):

$$T_A = T_B - qR(1 - \operatorname{sen}\theta) = \frac{P}{2}(1 + \operatorname{sen}\theta); \quad (2)$$

y

eliminando T_A en (1) resulta

$$\frac{9}{8}P = \frac{P}{2}(1 + \operatorname{sen}\theta)^2$$

deduciéndose el valor de θ buscado:

$$\theta = 30°$$

2.- El hilo forma una catenaria, definida por la ecuación

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{3}$$

cuya tensión horizontal constante vale

$$T_0 = T_A \operatorname{sen}\theta = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{8}P$$

por lo que el parámetro a de la catenaria es

$$a = \frac{T_0}{q} = \frac{3}{4}R.$$

El origen de ordenadas en la ecuación (3) lo obtenemos a partir del valor de T_B:

$$T_B = P = qy_B \quad \Rightarrow \quad y_B = 2R;$$

es decir, el origen de ordenadas está sobre la recta horizontal de rodadura. La abscisa del vértice en relación con la polea B se obtiene aplicando la ecuación (3) en B:

$$2R = \frac{3}{4}R\cosh\left(\frac{x_B}{3R/4}\right) \quad \Rightarrow \quad x_B = 1.2276R$$

3.- La coordenada de A en relación al vértice de la catenaria es

$$x_A = \frac{3}{4}R\operatorname{argcosh}\left(\frac{3R/2}{3R/4}\right) = -0.9877R$$

por lo cual la distancia horizontal entre el centro del disco y la polea es

$$L = R\cos 30° + 0.9877R + 1.2276R = 3.0813R.$$

Por último, la altura del vértice sobre la recta horizontal es precisamente el parámetro a de la catenaria:

$$h = \frac{3}{4}R$$