ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

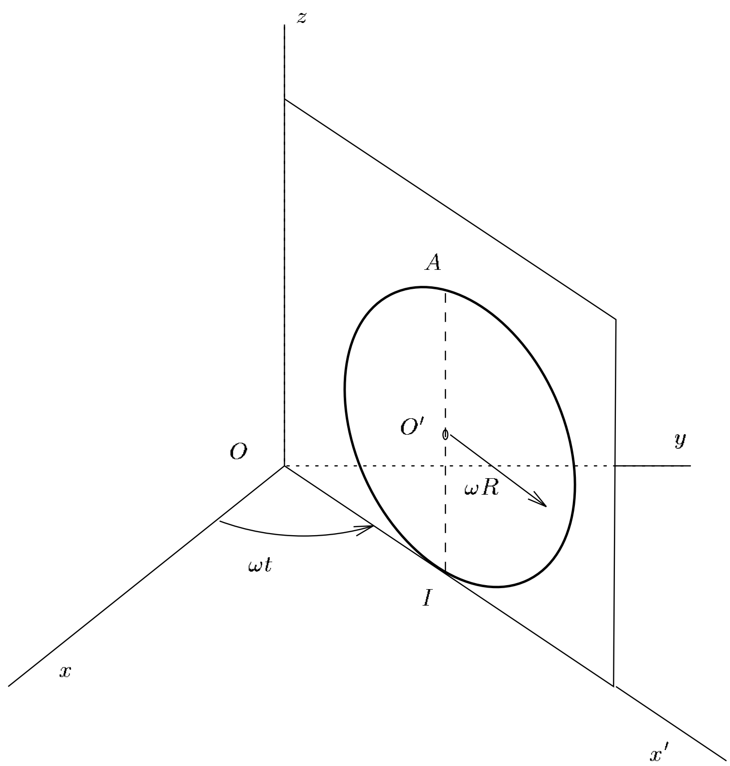
1$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

Un plano vertical $Ox'z$ gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical Oz, estando contenido el eje móvil Ox' dentro del plano horizontal Oxy. A su vez una circunferencia del radio R contenida en todo momento en el plano $Ox'z$ rueda sin deslizar sobre Ox', con velocidad de su centro O' relativa a este eje de valor ωR. En el instante inicial la circunferencia es tangente a Ox' en O. Determinar:

1. velocidad y aceleración angulares del movimiento absoluto de la circunferencia.
2. velocidad y aceleración (movimiento absoluto) del punto A de la circunferencia diametralmente opuesto al de tangencia con Ox', particularizando para el instante $t = 1/\omega$.
3. eje del movimiento helicoidal tangente y velocidad de deslizamiento según el mismo o velocidad mínima (particularizar para $t = 1/\omega$).



1.- El movimiento instantáneo se puede interpretar como composición de dos rotaciones (de ejes no concurrentes, por lo que no hay ningún punto de velocidad nula), $\omega\boldsymbol{k}$ alrededor del eje Oz y $\omega\boldsymbol{j}'$ alrededor del eje Iy' (perpendicular al Ox' dentro del plano horizontal, formando un triedro a derechas $Ox'y'z$). De esta forma,

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{k} + \omega\boldsymbol{j}' \tag{1}$$

Puesto que en la referencia móvil $Ox'y'z$ el vector $\boldsymbol{\Omega}$ es constante, su derivada proviene tan sólo de la velocidad con que gira dicha referencia:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\omega^2\boldsymbol{i}' \tag{2}$$

2.- En el instante particular que se pide es $OI = R$. La velocidad de A se calcula a partir de la de O',

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge R\boldsymbol{k} \\ &= \omega R\boldsymbol{i}' + \omega R\boldsymbol{j}' + (\omega\boldsymbol{k} + \omega\boldsymbol{j}') \wedge R\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

resultando

$$\boldsymbol{v}_A = 2\omega R\boldsymbol{i}' + \omega R\boldsymbol{j}' \tag{3}$$

Para la aceleración se puede hacer un desarrollo similar:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge R\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge R\boldsymbol{k})$$

Considerando que, a su vez,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{O'} &= \omega\boldsymbol{k} \wedge (\omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{OO'}) + 2\omega\boldsymbol{k} \wedge \omega R\boldsymbol{i}' \\ &= -\omega^2 R\boldsymbol{i}' + 2\omega^2 R\boldsymbol{j}' \end{aligned}$$

Operando resulta

$$\boldsymbol{a}_A = -\omega^2 R\boldsymbol{i}' + 4\omega^2 R\boldsymbol{j}' - \omega^2 R\boldsymbol{k} \tag{4}$$

3.- El movimiento helicoidal tangente es un eje de dirección $(0, 1, 1)$ (coordenadas en el triedro móvil $Ox'y'z$) que pasa por el punto medio de OI, situado a la distancia $R/2$ de O. La velocidad mínima (deslizamiento del eje) se calcula proyectando la velocidad de un punto cualquiera sobre ese eje:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega R \tag{5}$$

(como comprobación, obtendríamos el mismo resultado de emplear $\boldsymbol{v}_A$).