Mecánica

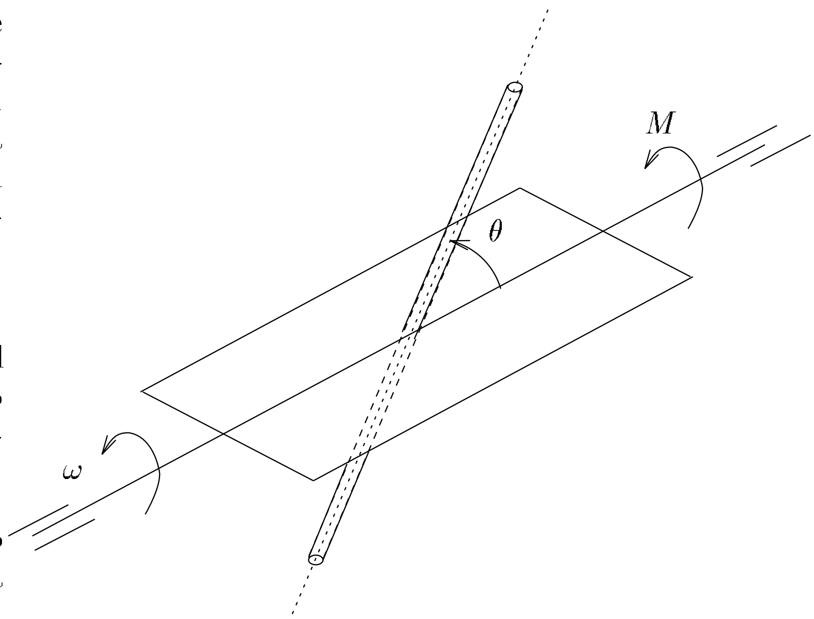
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Una barra de masa m longitud l y sección despreciable está montada sobre una armadura que la permite girar alrededor de una eje perpendicular por su centro, mientras que la armadura gira alrededor de otro eje perpendicular al anterior con velocidad angular constante ω.
Se pide:

1. Obtener la ecuación diferencial que define la variación del ángulo θ entre la barra y el eje de rotación de la armadura.
2. Valor del par M que es necesario aplicar según el eje de giro de la armadura.



1.- Consideremos un sistema de ejes móviles $Oxyz$ tal que O es el punto de intersección de la varilla con la armadura, Oz coincide en todo momento con la varilla, Oy es perpendicular a Oz y está en el plano de la armadura, y Ox define un triedro ortogonal a derechas con los anteriores. En este sistema las expresiones de la velocidad angular de la varilla y del tensor de inercia en el punto O son:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{i} + \dot{\theta}\, \boldsymbol{j} - \omega\cos\theta\, \boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{I}_O = \frac{1}{12} ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión de la energía cinética de la varilla, resulta:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{24} ml^2(\omega^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) \tag{3}$$

La función Lagrangiana coincide con la energía cinética ($L = T$), al ser el potencial constante. La ecuación de Lagrange del movimiento resulta:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{4}$$

2.- Para calcular el valor del par que es necesario aplicar, introducimos un grado de libertad φ en lugar del giro impuesto por ω, junto con una fuerza generalizada Q_φ que es el momento aplicado M. En este caso la expresión (1) de la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \, \boldsymbol{i} + \dot{\theta} \, \boldsymbol{j} - \dot{\varphi} \cos \theta \, \boldsymbol{k}$$

y la Lagrangiana:

$$L = T = \frac{1}{24} m l^2 (\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2)$$

La ecuación diferencial del movimiento correspondiente a φ resulta:

$$\frac{1}{12} m l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \ddot{\varphi} + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta = M \tag{5}$$

y sustituyendo $\dot{\varphi} = \omega$ en (5) resulta:

$$M = \frac{1}{6} m l^2 \omega \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{6}$$

Por último, es posible eliminar $\dot{\theta}$ de la ecuación anterior y dejarla expresada únicamente en función de θ. Para ello emplearíamos la integral de Jacobi, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \text{cte.}$:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{\omega^2}{2} \cos 2\theta = \dot{\theta}_0^{\,2} + \frac{\omega^2}{2} \cos 2\theta_0$$

(téngase en cuenta que la energía $E = T$ no se conserva)