Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1^er EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá? una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Enunciar el principio de D'Alembert para un sistema sometido a enlaces lisos. *Discutir* su relación con las leyes de Newton. (2.5 ptos.)

"En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas ($\boldsymbol{f}_i$) más el trabajo de las fuerzas de inercia ($-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$) para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces ($\delta\boldsymbol{r}_i$):

$$\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.''}$$

Debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo (y equivalente) a las leyes de Newton y a los principios de Newton-Euler para dinámica de sistemas. A diferencia de éstos, permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de los enlaces lisos.

Definir el movimiento que resulta de la composición de dos rotaciones, expresando la velocidad de deslizamiento y la velocidad de rotación, *discutiendo* todos los casos posibles. (2.5 ptos.)

1. *Rotaciones de ejes concurrentes.* Se pueden interpretar como dos sistemas de vectores deslizantes con resultante no nula ($\boldsymbol{\Omega}_i \neq \boldsymbol{0}$) y momento nulo en el eje ($\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$ para $O \in$ eje). La suma es otra rotación pura (velocidad de deslizamiento nula, $v_{\min} = 0$), de resultante $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \neq \boldsymbol{0}$, cuyo eje pasa por el punto de intersección de los ejes respectivos.

2. *Rotaciones de ejes paralelos.* El resultado es otra rotación suma de ambas ($\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$, $v_{\min} = 0$), de eje paralelo y coplanario a los anteriores, situado en la posición que cumple $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_2$, pudiéndose interpretar como un caso particular de ejes concurrentes que se cortan en un punto impropio. En el caso particular en que ambas rotaciones son iguales y de distinto signo el resultado es una traslación ($\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$, $v_{\min} \neq 0$).

3. *Rotaciones de ejes no concurrentes* ni paralelos. El resultado es un sistema general con traslación ($v_{\min} \neq 0$) y rotación ($\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \neq \boldsymbol{0}$).

Demostrar, para el caso en que la Lagrangiana de un sistema no dependa explícitamente del tiempo ($\partial L/\partial t = 0$), que existe una integral primera, estableciendo su expresión e interpretando su significado físico. (2.5 ptos.)

La derivada total de $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ respecto del tiempo es:

$$\frac{d}{dt}L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

donde se han empleado las ecuaciones de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$. Agrupando términos,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada *"integral de Jacobi":*

$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{cte}$$

En el caso en que la energía cinética sea una expresión cuadrática homogénea en $\dot{q}_j$ (o lo que es lo mismo, si no hay enlaces móviles), h coincide con la energía total $T + V$:

$$T = \sum_{j,k} \frac{1}{2} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \underbrace{\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_k\dot{q}_j}_{2T} - (T - V) = T + V$$

Deducir la expresión general del movimiento de un oscilador simple amortiguado de masa m, rigidez k y amortiguamiento viscoso c. Particularizar para el caso en que inicialmente el muelle esté en su longitud natural con velocidad v_0. (2.5 ptos.)

El sistema se define por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$. Al estudiar una solución $x(t) = ae^{rt}$, resulta la *ecuación característica*, $mr^2 + cr + k = 0$, cuya solución para r es:

$$r = -\underbrace{\frac{c}{2m}}_{\stackrel{\text{def}}{=} p} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \omega};$$

(supuesto que $c^2 - 4km < 0$, condición para que el movimiento sea oscilatorio). El resultado es una función armónica multiplicada por una exponencial decreciente:

$$x(t) = e^{-pt}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = ae^{-pt}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

en función de las constantes (c_1, c_2) ó (a, φ). Estas se calculan particularizando la solución para las condiciones iniciales,

$$0 = x(0) = ae^{(0)}\operatorname{sen}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = -pae^{(0)}\operatorname{sen}(0) + ae^{(0)}\omega\cos(0) = a\omega \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{\omega}$$

resultando finalmente

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-pt}\operatorname{sen}(\omega t)$$