Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Expresar tres integrales primeras para el movimiento de una peonza simétrica y *discutir* su significado físico. (4 ptos.)

La función Lagrangiana correspondiente al movimiento de una peonza simétrica con momentos principales de inercia (A, A, C) es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}A(p^2+q^2)+\frac{1}{2}Cr^2 - Mgd\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}A(\dot\theta^2+\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta)+\frac{1}{2}C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2 - Mgd\cos\theta \end{aligned}$$

siendo (ψ,θ,φ) los ángulos de Euler, $p=\dot\theta$, $q=\dot\psi\operatorname{sen}\theta$, $r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta$ (componentes de la velocidad de rotación en el triedro intermedio), M la masa y d la distancia del C.D.M. al punto fijo. La coordenada ψ es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}=0 \quad\Rightarrow\quad A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta + C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta = \text{cte.}$$

Esta integral primera equivale a la conservación del momento cinético según el eje vertical (se conserva debido a que la reacción pasa por dicho eje y el peso es paralelo al mismo):

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} = (A\dot\theta, A\dot\psi\operatorname{sen}\theta, Cr)\cdot(0,\operatorname{sen}\theta,\cos\theta) = A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta.$$

La coordenada φ es también cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0 \quad\Rightarrow\quad C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)=\text{cte.},$$

que equivale a la conservación del momento cinético según el eje de revolución de la peonza ($\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{k}$). Por último, todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total:

$$T+V=\frac{1}{2}A(\dot\theta^2+\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta)+\frac{1}{2}C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2+Mgd\cos\theta=\text{cte.}$$

Expresar la solución general del sistema lineal con n grados de libertad definido por la ecuación matricial $\mathsf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\}$, siendo $\{\mathbf{F}\}$ un vector de fuerza constante, con las condiciones iniciales $\{\mathbf{q}(0)\} = \{\mathbf{q}_0\}, \{\dot{\mathbf{q}}(0)\} = \{\mathbf{0}\}$. (3 ptos.)

La solución general del sistema dado es $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}_h + \{\mathbf{q}\}_p$, donde $\{\mathbf{q}\}_h$ es la solución de la ecuación homogénea, $\mathsf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$, y $\{\mathbf{q}\}_p = \mathsf{K}^{-1}\{\mathbf{F}\}$ es una solución particular de la ecuación completa. Por su parte $\{\mathbf{q}\}_h$ se expresa en función de los modos normales de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ y sus frecuencias propias asociadas ω_k,

$$\{\mathbf{q}\}_h = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos(\omega_k t - \delta_k)$$

siendo (B_k, δ_k) $2n$ constantes que se determinan imponiendo las condiciones iniciales,

$$\{\mathbf{q}_0\} = \sum_k B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos(\delta_k) + \{\mathbf{q}\}_p; \quad \{\mathbf{0}\} = \sum_k B_k\omega_k\{\mathbf{a}_k\}\operatorname{sen}(\delta_k)$$

Resolviendo resulta la expresión

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_k \alpha_k\{\mathbf{a}_k\}\cos(\omega_k t) + \{\mathbf{q}\}_p$$

siendo $\alpha_k = ||\mathbf{a}_k|| \cdot \mathsf{M} \cdot (\{\mathbf{q}_0\} - \{\mathbf{q}\}_p)$.

Sea un cable flexible, inextensible y homogéneo sometido a su propio peso. *Deducir* las expresiones que definen la tensión total del cable (T) y sus componentes horizontal y vertical (T_x, T_y) en un punto genérico del mismo. (3 ptos.)

El peso por unidad de longitud del cable es $-q\boldsymbol{k}$, por lo que la ecuación de equilibrio del hilo es

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = q\boldsymbol{k}$$

Proyectando esta ecuación según la dirección horizontal x resulta

$$\frac{dT_x}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_x = \text{cte.}$$

Se define un parámetro $a \stackrel{\text{def}}{=} T_x/q$, de forma que $\boxed{T_x = qa}$. Proyectando según la dirección z

$$\frac{dT_z}{ds} = q \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_z = qs}$$

siendo s el arco medido a partir del vértice de la catenaria, punto más bajo del cable en el que la tangente es horizontal ($T_z = 0$). Por último, multiplicando escalarmente por $d\boldsymbol{r}$,

$$d\boldsymbol{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = q\,dz \quad \Rightarrow \quad dT = q\,dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = qz}$$

eligiendo convenientemente el origen de z una altura $z_0 = a$ por debajo del vértice, ya que allí se debe cumplir $T = qz_0 = T_x = qa$.

Puesto que se cumple $T^2 = T_x^2 + T_z^2$, se deduce inmediatamente la relación que verifica la catenaria entre el arco y la ordenada:

$$z^2 = a^2 + s^2.$$