Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (9 de junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y dirigidas directamente a lo que se pregunta, escritas con letra clara y *a tinta.* Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Un sólido rígido de masa M y tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$, con velocidad $\boldsymbol{v}_G$ de su C.D.M. y velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$, choca contra una superficie plana fija y lisa con normal $\boldsymbol{n}$, produciéndose el impacto en un punto del sólido P de posición conocida $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{GP}$. Sabiendo que el coeficiente de restitución vale (e), *expresar* las ecuaciones generales que permitan obtener el movimiento del sólido después del choque. (5.0 ptos.)

El movimiento del sólido después del choque lo caracterizamos por la velocidad del C.D.M, $\boldsymbol{v}'_G$, y la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}'$. Además de estas dos variables vectoriales, otra incógnita es la impulsión I debida al plano, que llevará la dirección de la normal $\boldsymbol{n}$, al ser liso.

Para resolver el choque planteamos las ecuaciones de balance. El de la cantidad de movimiento se expresa como:

$$M\boldsymbol{v}'_G = M\boldsymbol{v}_G + I\boldsymbol{n} \tag{1}$$

El balance del momento cinético en G resulta:

$$\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{r} \wedge (I\boldsymbol{n}) \tag{2}$$

Por último, la ecuación del coeficiente de restitución (balance de energía) es

$$e = -\frac{(\boldsymbol{v}'_G + \boldsymbol{\Omega}' \wedge \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}} \tag{3}$$

Las expresiones (1, 2, 3) proporcionan 7 ecuaciones escalares que permiten resolver las 7 incógnitas planteadas.

Sea un sistema dinámico lineal con varios grados de libertad, definido por la ecuación matricial dinámica $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$. *Enunciar y demostrar* la propiedad de ortogonalidad de los modos normales de vibración. (2.5 ptos.)

Dos modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$, correspondientes a frecuencias propias distintas $\omega_k \neq \omega_l$, son ortogonales respecto a la matriz de masa $\mathbf{M}$:

$$\|\mathbf{a}_k\|\mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0 \tag{1}$$

(empleamos la notación $\|\mathbf{a}_k\| \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}$).

En efecto, debe cumplirse:

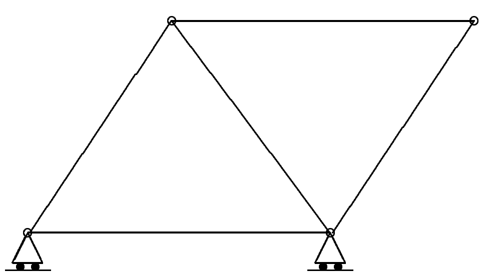
$$\begin{aligned} \omega_k^2\mathbf{M}\{\mathbf{a}_k\} &= \mathbf{K}\{\mathbf{a}_k\} \\ \omega_l^2\mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} &= \mathbf{K}\{\mathbf{a}_l\} \end{aligned}$$

Premultiplicando la primera igualdad por $\|\mathbf{a}_l\|$, la segunda por $\|\mathbf{a}_k\|$ y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de $\mathbf{M}$ y de $\mathbf{K}$ obtenemos

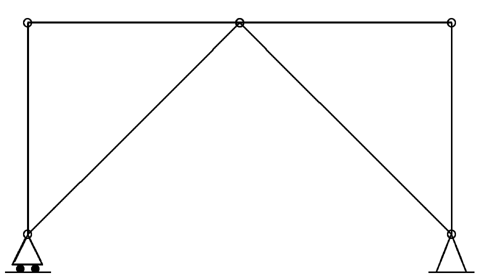
$$(\omega_k^2 - \omega_l^2)\|\mathbf{a}_k\|\mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0 \tag{2}$$

Al ser $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$ queda demostrada la ortogonalidad (1).

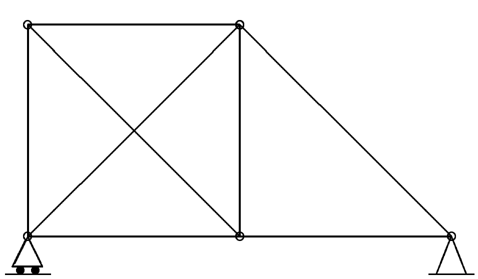
Para los sistemas de barras articuladas planos que se muestran, *discutir de forma razonada* el tipo de estructura o mecanismo de que se trata en cada caso. (2.5 ptos.)



Dejando al margen la sustentación, se trata de una *estructura internamente isostática* ($n = 4,\ b = 5,\ 2n = 3+b$), ya que no posee ningún grado de libertad interno. Sin embargo, la sustentación es insuficiente, existiendo un grado de libertad (traslación horizontal del conjunto como un sólido rígido), por lo que en su conjunto el sistema *no constituye propiamente una "estructura"*.



En este caso la sustentación sí es suficiente (isostática), pero en cambio el sistema de barras es un *mecanismo*, al poseer un grado de libertad interno (rotación alrededor de la rótula central). Comprobamos que ($n = 5,\ b = 6,\ 2n > 3 + b$), hay insuficientes barras para restringir el movimiento interno.



La sustentación es isostática, pero el sistema constituye una *estructura hiperestática*. Comprobamos que ($n = 5,\ b = 8,\ 2n < 3 + b$), por lo que existen barras redundantes en la estructura. En concreto, de eliminarse una de las dos diagonales del cuadrado resultaría una estructura isostática.