Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 1997)

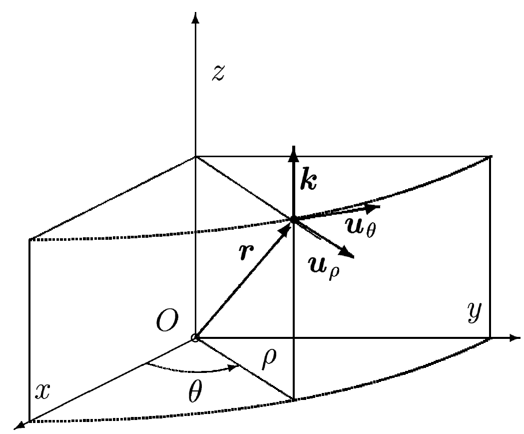
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y dirigidas directamente a lo que se pregunta, escritas con letra clara y *a tinta*. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Deducir las expresiones de la velocidad y de la aceleración de un punto P, en coordenadas cilíndricas. Particularizar dichas expresiones para el caso en que P esté obligado a moverse sobre una superficie esférica de radio R (5 ptos.)

Las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) permiten definir un triedro de versores unitarios $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$ (ver figura). En función de los versores del triedro cartesiano ortonormal $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ tienen la expresión



$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}}_\rho = -\dot\theta\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} + \dot\theta\cos\theta\boldsymbol{j} = \dot\theta\boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = -\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{i} - \dot\theta\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} = -\dot\theta\boldsymbol{u}_\rho \\ \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1}$$

La posición de un punto queda definida mediante

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Derivando esta expresión dos veces respecto de t y empleando (1) se obtiene la velocidad y aceleración:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot\rho\boldsymbol{u}_\rho + \rho\dot\theta\boldsymbol{u}_\theta + \dot z\boldsymbol{k}; \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\boldsymbol{u}_\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\boldsymbol{u}_\theta + \ddot z\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Aplicación: La superficie esférica queda definida en coordenadas cilíndricas mediante $(\rho, \theta, z) = (R\cos\lambda, \theta, R\operatorname{sen}\lambda)$, donde λ es la latitud medida desde el ecuador. Derivando podemos obtener las componentes de la velocidad y aceleración deducidas de (3) y (4):

$$\begin{cases} v_\rho = -R\dot\lambda\operatorname{sen}\lambda \\ v_\theta = R\dot\theta\cos\lambda \\ v_z = R\dot\lambda\cos\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a_\rho = -R\ddot\lambda\operatorname{sen}\lambda - R\dot\lambda^2\cos\lambda - R\dot\theta^2\cos\lambda \\ a_\theta = -2R\dot\lambda\dot\theta\operatorname{sen}\lambda + R\ddot\theta\cos\lambda \\ a_z = R\ddot\lambda\cos\lambda - R\dot\lambda^2\operatorname{sen}\lambda \end{cases}$$

La ecuación diferencial del movimiento de un oscilador lineal es $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=q\,\mathrm{sen}\,(\Omega t)$. *Deducir* el valor de la frecuencia Ω que da lugar a la amplitud máxima del movimiento del oscilador. (2.5 ptos.)

La ecuación horaria del movimiento, solución de la ecuación diferencial, consta de dos sumandos, uno que desaparece al cabo del tiempo (solución general de la homogénea, $x_h(t)$), y otro de régimen permanente (solución particular de la completa, $x_p(t)$):

$$x(t) = \underbrace{ae^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)}_{x_h(t)} + \underbrace{A\,\mathrm{sen}(\Omega t+\delta)}_{x_p(t)}, \qquad (\text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}). \tag{5}$$

Admitiendo que al cabo de cierto tiempo puede despreciarse $x_h(t)$, la amplitud del movimiento queda definida por el parámetro A que caracteriza el régimen permanente. Calculamos su valor obligando a que $x_p(t)$ cumpla la ecuación diferencial en dos instantes dados:

$$(k-m\Omega^2)\,\mathrm{sen}(\Omega t+\delta)+c\Omega\cos(\Omega t+\delta)=\frac{q}{A}\,\mathrm{sen}\,\Omega t \Rightarrow \begin{cases} t=0: & (k-m\Omega^2)\,\mathrm{sen}\,\delta+c\Omega\cos\delta=0; \\ t=-\frac{\delta}{\Omega}: & c\Omega=-\frac{q}{A}\,\mathrm{sen}(\delta) \end{cases}$$

Eliminando δ de las dos ecuaciones anteriores, resulta:

$$A=\frac{q}{\pm\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}}. \tag{6}$$

El máximo de A en función de Ω se produce para el mínimo del radicando en el denominador:

$$0=\frac{d}{d\Omega}[(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2]=2(k-m\Omega^2)(-2\Omega)+2c^2\Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_r=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}}$$

Deducir la expresión de la energía cinética de un sistema general de n partículas, en un sistema de referencia (SCM) con origen en el centro de masas G y direcciones de sus ejes constantes (Teorema de König) (2.5 ptos.)

Sea un sistema de N partículas $\{m_i,\ i=1\dots N\}$, con velocidades $\boldsymbol{v}_i$ relativas a un sistema inercial. Llamando G al centro de masa, las velocidades relativas al SCM son $\boldsymbol{\nu}_i=\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_G$. Desarrollamos la expresión de la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{\nu}_i)\cdot(\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2}m_i\nu_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=}T^{SCM}}+\underbrace{\left(\sum_i m_i\boldsymbol{\nu}_i\right)}_{=\boldsymbol{0}}\cdot\boldsymbol{v}_G+\underbrace{\sum_i\frac{1}{2}m_i v_G^2}_{\frac{1}{2}Mv_G^2}, \end{aligned}$$

El primer término (T^{SCM}) es la energía cinética que mediría un observador ligado al SCM; el segundo se anula ya que define la velocidad de G relativa a sí mismo; y el tercero es una simple suma de la masa total del sistema. Resulta:

$$T=\frac{1}{2}Mv_G^2+T^{SCM} \qquad (\underline{\textit{Teorema de König}})$$