Mecánica

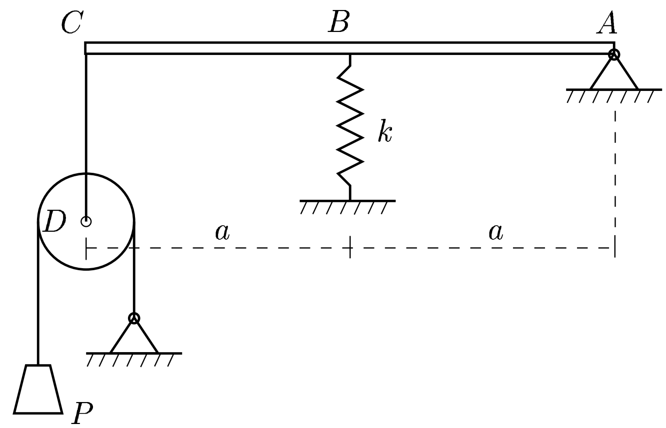
EXAMEN FINAL (27 de junio de 1997)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y dirigidas directamente a lo que se pregunta, escritas con letra clara y *a tinta*. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Enunciar el principio de los trabajos virtuales para un sistema mecánico general. *Aplicarlo* para resolver el sistema de la figura, sometido al peso P, en que la barra AC es rígida y sin masa, la polea D no tiene rozamiento ni masa, y los hilos son inextensibles y de masa igualmente despreciable. Deberá calcularse la elongación del resorte de constante elástica k existente en B. (4.0 ptos.)



El *Principio de los trabajos virtuales* expresa una condición necesaria y sufiente para el equilibrio de un sistema. Si todos los enlaces son lisos, el trabajo de las fuerzas aplicadas (es decir, excluyendo las reacciones) para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces ($\delta \boldsymbol{r}_i$) debe ser nulo:

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \quad \forall\{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ compatible,} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{f}_i$ son las fuerzas activas o aplicadas.

Aplicación: Llamando x a la elongación del resorte en el equilibrio (positiva en sentido descendente), la fuerza ejercida por el mismo será $-kx$. Suponemos un desplazamiento virtual vertical δx en el punto B. El extremo C tendrá un desplazamiento $2\delta x$, igual que D, mientras que el desplazamiento vertical del peso P será $4\delta x$ (en virtud de la acción de la polea). Aplicando la expresión (1):

$$\delta W = (-kx)(\delta x) + (P)(4\delta x) = 0 \quad \forall \delta x,$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$x = \frac{4P}{k}.$$

Definir y *expresar* el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ de un sólido $\mathcal{B}$ de masa M respecto de un punto O del mismo. *Expresar*, en función de $\boldsymbol{I}_O$ y de la posición relativa al C.D.M. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{GO}$, el tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ respecto al C.D.M. y el momento cinético respecto de G para un movimiento general definido por el campo de velocidades $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v}_G)$. (3.0 ptos.)

El tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ permite obtener el momento cinético para el movimiento con O fijo, en función de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}; \quad (H_O)_i = (I_O)_{ij}\Omega_j. \tag{1}$$

El tensor de inercia se puede expresar de manera explícita mediante

$$\boldsymbol{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2\mathbf{1} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\rho\, dV; \quad (I_O)_{ij} = \int_{\mathcal{B}} (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\rho\, dV. \tag{2}$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad, de componentes δ_{ij} (deltas de Kronecker) en una base ortonormal, y $(\otimes)$ indica producto tensorial o diádico.

El tensor $\boldsymbol{I}_G$ en función de $\boldsymbol{I}_O$ es:

$$\boldsymbol{I}_G = \boldsymbol{I}_O - M(OG^2\mathbf{1} - \boldsymbol{OG}\otimes\boldsymbol{OG}); \quad (I_G)_{ij} = (I_O)_{ij} - M[OG^2\delta_{ij} - OG_i OG_j], \tag{3}$$

y el momento cinético respecto de G es

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}; \quad (H_G)_i = (I_G)_{ij}\Omega_j. \tag{4}$$

(no depende de $\boldsymbol{v}_G$).

Para un sistema dinámico lineal con varios grados de libertad sometido a oscilaciones libres y sin amortiguamiento, *expresar* la ecuación diferencial matricial; *estudiar* el tipo de solución posible y *plantear* el problema de autovalores, *estableciendo* la ecuación característica y el modo de cálculo de los modos normales de vibración. (3.0 ptos.)

La ecuación matricial es

$$\mathsf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}; \quad m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0. \tag{1}$$

Buscamos una solución de la forma

$$\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t} = C\{\mathbf{a}\}(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t), \tag{2}$$

donde $C \in \mathbb{C}$ y $\{\mathbf{a}\} \in \mathbb{R}^n$. Si se deriva dos veces (2), $\{\ddot{\mathbf{q}}\} = -\omega^2 C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t} = -\omega^2\{\mathbf{q}\}$, y sustituyendo en (1),

$$(-\omega^2\mathsf{M} + \mathsf{K})\{\mathbf{a}\}C\,e^{i\omega t} = \{\mathbf{0}\};$$

Al ser $Ce^{i\omega t} \neq 0$, se puede eliminar, resultando

$$\mathsf{K}\{\mathbf{a}\} = \omega^2\mathsf{M}\{\mathbf{a}\} \tag{3}$$

que expresa un *problema de autovalores generalizado*, siendo los *autovalores* $\lambda = \omega^2$. Para que existan soluciones (distintas de la trivial $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$), el sistema de ecuaciones homogéneo (3) debe ser singular, anulándose el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|\mathsf{K} - \lambda\mathsf{M}| = 0 \tag{4}$$

(*ecuación característica*). Las raíces de esta ecuación ($\lambda_k = \omega_k^2,\ k = 1, 2\dots n$) corresponden a los valores de λ que hacen posible una solución no trivial de (3); cada uno de ellos está asociado por tanto a un vector solución $\{\mathbf{a}_k\}$, de (3) (*autovector* o *modo normal de vibración*).