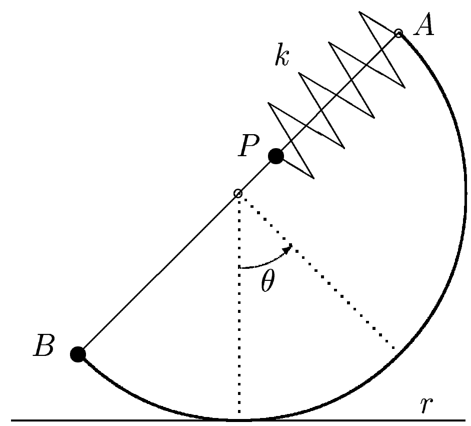
Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

Un semiaro de radio R y peso p se apoya sobre una guía horizontal r, estando ambos contenidos en un plano vertical. Los extremos A, B del diámetro están unidos por una varilla de peso despreciable, sobre la que desliza un anillo P de peso q, unido con A mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. En el punto B está soldado un punto material de igual peso q. Denominando s la distancia de A a P y θ al ángulo que el eje de simetría del semiaro forma con la vertical, se pide:



1. encontrar las configuraciones de equilibrio del sistema;
2. discutir la estabilidad del equilibrio;
3. calcular la reacción de la guía r sobre el semiaro.

1.- El potencial del sistema es

$$V = py_G + q(y_B + y_P) + \frac{1}{2}ks^2, \tag{1}$$

donde se ha llamado y a la coordenada vertical y G al centro de masas del semiaro, cuya distancia al centro del mismo es $2R/\pi$. Particularizando los valores

$$y_G = R - \frac{2R}{\pi}\cos\theta; \quad y_P = R + (R-s)\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad y_B = R(1-\mathrm{sen}\,\theta);$$

y eliminando constantes resulta

$$V(s,\theta) = -\frac{2R}{\pi}p\cos\theta - qs\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}ks^2. \tag{2}$$

Los puntos de equilibrio son aquellos en los que el potencial es estacionario,

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad ks - q\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2R}{\pi}p\,\mathrm{sen}\,\theta - qs\cos\theta = 0. \tag{4}$$

De (3) se deduce $s = \frac{q}{k}\,\mathrm{sen}\,\theta$, lo que sustituido en (4) arroja

$$\mathrm{sen}\,\theta\left[\frac{2R}{\pi}p - \frac{q^2}{k}\cos\theta\right] = 0. \tag{5}$$

Esta última ecuación se verifica para dos valores de θ:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{2Rpk}{\pi q^2}\right) \quad (0 \leq \theta_2 \leq \pi/2) \quad (\exists \text{ si } 2Rpk \leq \pi q^2) \end{cases} \tag{6}$$

(La solución $\theta_3 = -\theta_2$ no es posible, ya que sería en este caso $s_3 = (q/k)\,\mathrm{sen}\,\theta_3 < 0$).

Las posiciones de equilibrio son por tanto, en coordenadas (s, θ):

$$\Gamma_1 = (0, 0); \tag{7}$$

$$\Gamma_2 = \left(\frac{q}{k}\left[1 - \left(\frac{2Rpk}{\pi q^2}\right)^2\right]^{1/2}, \arccos\left[\frac{2Rpk}{\pi q^2}\right] \right). \tag{8}$$

Para que exista Γ_2 debe cumplirse $s_2 \leq 2R$, además de la condición definida en (6).

2.- El equilibrio es estable si el Hessiano es definido positivo:

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right) = \begin{pmatrix} k & -q\cos\theta \\ -q\cos\theta & \frac{2R}{\pi}p\cos\theta + qs\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Particularizando en las posiciones de equilibrio,

$$\mathbf{H}(\Gamma_1) = \begin{pmatrix} k & -q \\ -q & \frac{2Rp}{\pi} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{H}(\Gamma_2) = \begin{pmatrix} k & -\frac{2Rpk}{\pi q} \\ -\frac{2Rpk}{\pi q} & \frac{q^2}{k} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

El primer menor principal es $k > 0$, luego basta con estudiar el determinante:

$$|\mathbf{H}(\Gamma_1)| = \frac{2Rpk - \pi q^2}{\pi}; \qquad |\mathbf{H}(\Gamma_2)| = \frac{(\pi q^2)^2 - (2Rpk)^2}{(\pi q)^2}. \tag{11}$$

Si suponemos que $2Rpk \neq \pi q^2$, el equilibrio es:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \text{estable si } 2Rpk > \pi q^2 \\ \text{inestable si } 2Rpk < \pi q^2 \end{cases} ; \qquad \Gamma_2 : \text{ estable siempre que exista.} \tag{12}$$

Estudiamos ahora el caso límite en que $2Rpk = \pi q^2$, en cuyo caso $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Considerando $2R/\pi = q^2/(pk)$ y sumando al potencial la constante q^2/k de forma que $V'(0,0) = V(0,0) + q^2/k = 0$,

$$V'(s, \theta) = \frac{1}{2k}\left[k^2 s^2 - 2kqs\,\mathrm{sen}\,\theta + 2q^2(1 - \cos\theta)\right]. \tag{13}$$

Resolviendo $V'(s, \theta) = 0$ para s:

$$s = \frac{q}{k}\left[\mathrm{sen}\,\theta \pm \sqrt{-(1 - \cos\theta)^2}\right], \tag{14}$$

lo que sólo se cumple para $\cos\theta = 1$, es decir, $V'(s, \theta)$ se anula sólo para $(s, \theta) = (0, 0)$. Es fácil comprobar que en un entorno de $(0, 0)$ existen puntos en que $V'(s, \theta) > 0$, por lo que $(0, 0)$ es un mínimo y en este caso el equilibrio es estable.

3.- Estableciendo el equilibrio de fuerzas externas sobre el sistema se deduce inmediatamente que la recta r proporciona una reacción vertical ascendente, de valor

$$N = p + 2q. \tag{15}$$