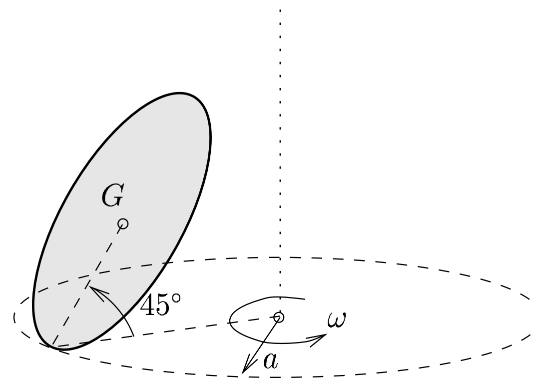
Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 4º (20 ptos.) Tiempo: 90 min.

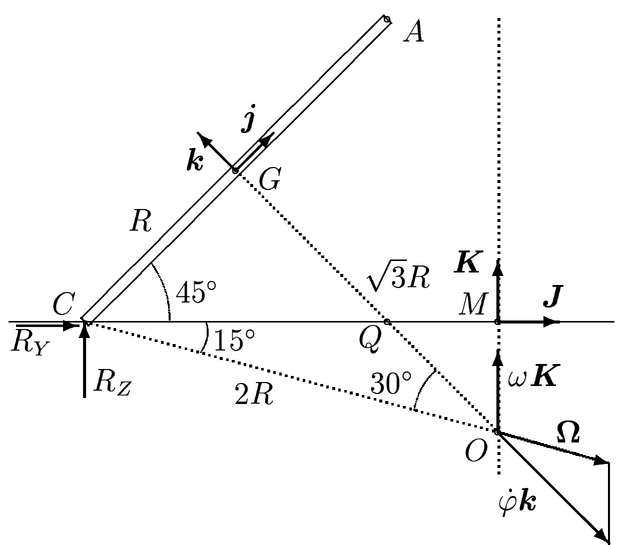
Un disco circular homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que mantiene en todo momento una inclinación constante de 45°, y el punto de contacto con el plano describe sobre él una circunferencia de radio $a = R(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}$ con velocidad uniforme de valor $a\omega$.



1. Suponiendo el movimiento dado del disco sin atender a sus causas:
   (a) describir el campo de velocidades del disco, especificando el eje del movimiento helicoidal tangente, la velocidad de rotación y la velocidad mínima;
   (b) calcular la aceleración angular del disco y la aceleración de su centro;
   (c) calcular la velocidad y aceleración del punto del disco que en un instante dado se encuentra en el extremo superior de su perímetro.
2. Para que el movimiento del disco pueda ser el descrito, se pide:
   (a) reacción del plano;
   (b) ecuaciones de Euler del movimiento;
   (c) valor necesario de ω.

   (para este último apartado no será necesario estudiar la estabilidad del movimiento).

1.a.- La figura adjunta representa un plano vertical que contiene al eje del disco. El punto de contacto C entre disco y plano tiene velocidad nula al rodar sin deslizar. También tiene velocidad nula el punto O intersección del eje normal al disco con el eje vertical de precesión, por lo que el movimiento es una rotación (velocidad mínima nula), de eje CO. El enunciado establece que $a = \overline{CM} = R(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}$, de donde resulta mediante razonamientos geométricos sencillos $\overline{CO} = 2R$, $\overline{GO} = \sqrt{3}R$, $\overline{OM} = R(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ y $\widehat{OCM} = 15°$.



El axoide móvil es un cono de eje OG y semiángulo 30° que rueda sin deslizar dentro del axoide fijo, otro cono de eje OM y semiángulo 75°.

Emplearemos el triedro móvil ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) de la figura, en que $\boldsymbol{k}$ es normal al disco, $\boldsymbol{j}$ sigue un diámetro de máxima pendiente e $\boldsymbol{i}$ es normal a los anteriores formando un triedro a derechas (horizontal, normal al plano de la figura saliendo hacia fuera del papel). Corresponde al denominado *triedro intermedio*, ya que no sigue la rotación propia del disco. Emplearemos también el *triedro fijo* ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$), siendo en el instante que se dibuja la figura $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{J}$ horizontal en el plano de la figura y $\boldsymbol{K}$ vertical.

Se puede considerar la velocidad de rotación del disco $\boldsymbol{\Omega}$ como suma de la velocidad de precesión $\omega\,\boldsymbol{K}$ y la de rotación propia $\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$. La condición de rodadura (velocidad nula del punto C del disco) establece que $\dot{\varphi}R = -\omega a$, por lo que $\dot{\varphi} = -\omega(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}$. El módulo de la velocidad de rotación resulta $\Omega = \sqrt{2}\omega$, y sus componentes en los triedros descritos

$$\boldsymbol{\Omega} = \sqrt{2}\omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\omega}{2}\left[(\sqrt{3}+1)\boldsymbol{J} - (\sqrt{3}-1)\boldsymbol{K}\right]. \tag{1}$$

1.b.- La velocidad angular es un vector constante en relación al plano vertical de la figura, siendo su variación la que proviene de la rotación de este plano, $\omega\boldsymbol{K}$. Por tanto la aceleración angular es

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{\Omega} = -\omega^2\frac{1+\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}. \tag{2}$$

Por otra parte, el centro G describe una circunferencia horizontal de radio $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R$, por lo que

$$\boldsymbol{a}_G = \omega^2 R\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{J} = \omega^2 R\frac{\sqrt{3}}{2}(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}). \tag{3}$$

1.c.- Calculamos los valores pedidos empleando las expresiones de los campos de velocidad y aceleración del sólido:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\Omega}\wedge(2R\boldsymbol{j}) = \sqrt{6}\omega R\,\boldsymbol{i}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_A &= \boldsymbol{a}_G + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(R\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge(R\boldsymbol{j}))\\ &= \frac{\omega^2 R}{2}\left[(-3+\sqrt{3})\boldsymbol{j} - (1+3\sqrt{3})\boldsymbol{k}\right] \qquad (5)\\ &= \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2}}\left[(-1+2\sqrt{3})\boldsymbol{J} - (2+\sqrt{3})\boldsymbol{K}\right]. \qquad (6)\end{aligned}$$

2.a Conociendo $\boldsymbol{a}_G$ de (3) la reacción del plano se calcula trivialmente:

$$\boldsymbol{R} - Mg\boldsymbol{K} = M\boldsymbol{a}_G \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{R} = M\omega^2 R\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{J} + Mg\,\boldsymbol{K}. \tag{7}$$

2.b.- Estableceremos las ecuaciones de Euler en el triedro intermedio,

$$\boldsymbol{M}_G = (-R\boldsymbol{j})\wedge\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_G\cdot\left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_{\text{tr.int.}} + \omega\boldsymbol{K}\wedge(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}).$$

Teniendo en cuenta que $d\boldsymbol{\Omega}/dt|_{\text{tr.int.}} = \mathbf{0}$, a partir de (1), (7) y de $\boldsymbol{I}_G = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, se obtiene

$$M\omega^2 R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - Mg\frac{R}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}M\omega^2 R^2 \frac{1+2\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

Puede comprobarse fácilmente que se obtiene el mismo resultado si se emplean las ecuaciones de Euler en el triedro del cuerpo,

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

2.c.- El valor de ω necesario se deduce directamente despejando de (8):

$$\omega^2 = \frac{4\sqrt{2}}{1+6\sqrt{3}} \frac{g}{R}. \tag{9}$$