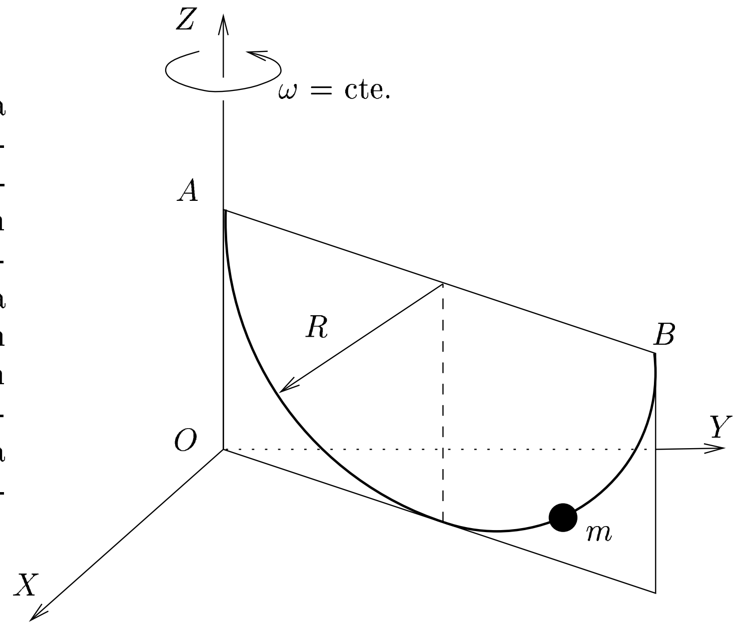
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (27 de Junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 60 min.

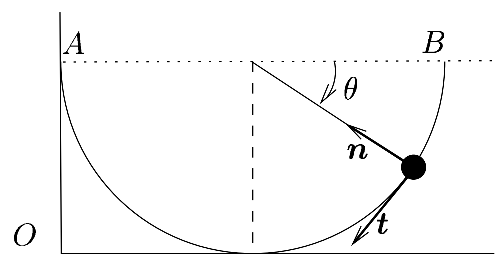
Un semiaro homogéneo de radio R gira con velocidad angular ω constante alrededor del eje Z vertical, estando obligado a permanecer en todo momento en un plano vertical, tal y como se muestra en la figura adjunta. Una partícula pesada de masa m puede moverse sin rozamiento ensartada en el semiaro. En el instante inicial la partícula se encuentra situada en el punto B y se lanza con una velocidad v_0 relativa al semiaro.



Se pide:

1. Ecuación del movimiento.
2. Velocidad v_0 mínima necesaria para que la partícula alcance el punto A.
3. Reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico para una v_0 cualquiera.

1.- Una posición genérica de la partícula queda determinada con el ángulo θ (ver figura adjunta)



La velocidad de la partícula se expresa como:

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\theta}\boldsymbol{t} + \omega R(1+\cos\theta)\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{k}$ el vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{n}$ hacia dentro del papel. Tomando como nivel de potencial nulo el segmento AB, la lagrangiana se expresa como

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2(1+\cos\theta)^2 + mgR\operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Al verificarse $\partial L/\partial t = 0$, existe la integral de Jacobi (que no coincide con la de conservación de la energía al no ser la lagrangiana una forma cuadrática homogénea):

$$h = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2(1+\cos\theta)^2 - mgR\operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Para obtener la ecuación del movimiento pedida, falta calcular la constante de la expresión anterior. Teniendo en cuenta que en el instante inicial $\theta = 0$ y $R\dot{\theta} = v_0$, se puede despejar $\dot{\theta}$ en función de θ y de las condiciones iniciales:

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \omega^2(1+\cos\theta)^2 + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\theta}{R} - 4\omega^2 \tag{4}$$

2.- La velocidad mínima es aquella para la que $\dot{\theta} = 0$ en $\theta = \pi$. Sustituyendo en (4), la velocidad pedida resulta:

$$v_0 = 2\omega R \tag{5}$$

3.- La reacción total del semiaro es la suma de una reacción $N_1\,\boldsymbol{n}$ según la normal (no hay reacción según $\boldsymbol{t}$ puesto que no hay rozamiento) y una reacción $N_2\,\boldsymbol{k}$ según la dirección perpendicular al plano del semiaro (puesto que la partícula está obligada a moverse siempre en el plano vertical móvil).

Para establecer las ecuaciones fundamentales de la dinámica según las direcciones $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{k}$, expresamos primero la aceleración total, considerando el movimiento relativo al semiaro, como $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{cor}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{rel} &= R\ddot{\theta}\boldsymbol{t} + R\dot{\theta}^2\boldsymbol{n};\\
\boldsymbol{a}_{arr} &= [\omega^2 R(1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta]\boldsymbol{t} + [\omega^2 R(1+\cos\theta)\cos\theta]\boldsymbol{n};\\
\boldsymbol{a}_{cor} &= -2\omega R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

La ecuación según $\boldsymbol{n}$ permite calcular la reacción N_1:

$$\begin{aligned}
N_1 &= mg\,\mathrm{sen}\,\theta + m\omega^2 R(1+\cos\theta)\cos\theta + mR\dot{\theta}^2\\
&= m\frac{v_0^2}{R} + m\omega^2 R(-3 + 3\cos\theta + 2\cos^2\theta) + 3mg\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned} \tag{6}$$

donde se ha empleado (4) para eliminar $\dot{\theta}$. Operando similarmente, la ecuación según $\boldsymbol{k}$ permite calcular la reacción N_2:

$$\begin{aligned}
N_2 &= -2m\omega R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\\
&= -2m\omega R\,\mathrm{sen}(\theta)\left[\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \omega^2(1+\cos\theta)^2 + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\theta}{R} - 4\omega^2\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{7}$$