Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE (16 de Septiembre de 1997)

Apellidos *Nombre* *N”o* *Grupo*

Ejercicio 2”o Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Demostrar que conocido el tensor de inercia en un punto O ($\boldsymbol{I}_O$) se puede obtener el momento de inercia respecto a cualquier recta que pasa por O (3 ptos.)

Llamemos $\boldsymbol{u}$ al versor de la recta, y $\boldsymbol{r}$ al vector de posición, con origen en O, del elemento de masa $\mathrm{d}m$.

La distancia h de éste a la recta valdrá $h = |\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r}|$ por lo que tenemos:

$$I_u = \int h^2 \,\mathrm{d}m = \int (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r}) \,\mathrm{d}m = \boldsymbol{u} \cdot \int \boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r}) \,\mathrm{d}m = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{u}$$

Un hilo inextensible (de peso despreciable) da una vuelta completa alrededor de un cilindro rugoso fijo con coeficiente de rozamiento μ. Si en uno de sus extremos la tensión es T_0, *deducir* con qué fuerza F habrá que tirar del otro extremo libre para conseguir arrastrar el hilo. (3 ptos.)

Llamemos Q a la reacción normal del cilindro, y R a su radio. Las ecuaciones de equilibrio del hilo serán:

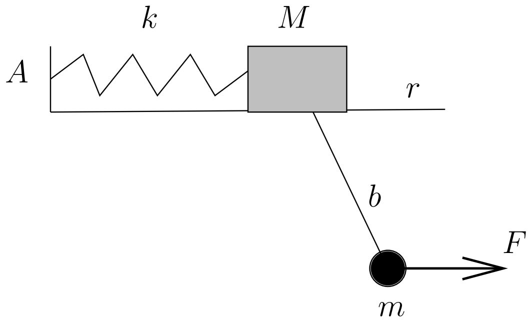
- Según la tangente: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \mu Q = 0$
- Según la normal: $\dfrac{T}{R} - Q = 0$

Despejamos Q y sustituimos arriba: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -\mu\dfrac{T}{R}$. Separando variables: $\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu\dfrac{\mathrm{d}s}{R} = -\mu\,\mathrm{d}\phi$.

Integramos entre el extremo en el que la tensión es T_0 (donde tomaremos el origen del ángulo, es decir: $\phi = 0$) y el extremo (donde $\phi = 2\pi$):

$$\boxed{F = T_0 e^{-2\pi\mu}}$$

Definir el concepto de fuerza generaliza Q_i asociada al grado de libertad q_i. Expresar las fuerzas generalizadas (debidas a todas las fuerzas actuantes), asociadas a los grados de libertad del sistema material formado por: Un péndulo simple (de masa m y longitud b) que cuelga de una masa M que puede recorrer una recta r, horizontal, fija y lisa, estando sujeta al extremo de un resorte elástico de constante k, cuyo extremo está fijo a un punto A de r. Sobre m actúa una fuerza horizontal F. El movimiento tiene lugar en el plano vertical que contiene a r. (4 ptos.)



La fuerza generalizada Q_i es el coeficiente de δq_i en la expresión del trabajo virtual. Su valor es $\Sigma \boldsymbol{f}_j \cdot \partial \boldsymbol{r}_j / \partial q_i$, y si las fuerzas derivan de un potencial V, $Q_i = -\partial V / \partial q_i$.

Escojamos como coordenadas del sistema dado:

- $x =$ alargamiento del resorte (desde su longitud natural).
- $\phi =$ ángulo del péndulo con la vertical descendente (en sentido antihorario).

En un desplazamiento virtual δx, el trabajo vale:

$$\delta W = -kx\, \delta x + F\, \delta x$$

luego

$$\boxed{Q_x = F - kx}$$

En un desplazamiento virtual $\delta\phi$, el trabajo vale:

$$Fb\, \delta\phi \cos\phi - mgb\, \delta\phi \operatorname{sen}\phi$$

luego

$$\boxed{Q_\phi = (F\cos\phi - mg\operatorname{sen}\phi)b}$$