Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

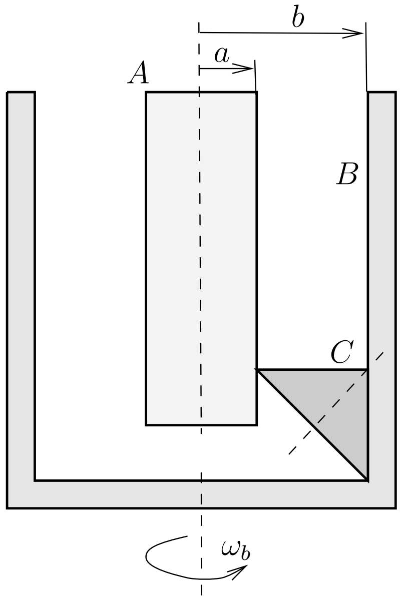
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de septiembre de 1997)

Apellidos *Nombre* *N”o* *Grupo*

Ejercicio 3”o Tiempo: 45 min.

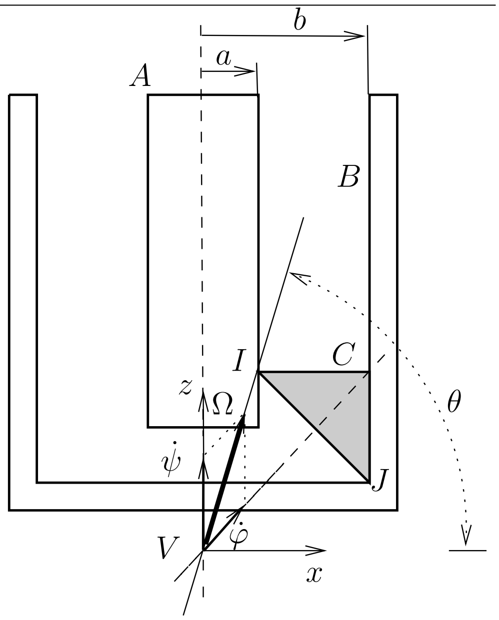
Entre dos superficies cilíndricas coaxiales A y B y de radios respectivos a y $b = \sqrt{3}a$, se encuentra un cono recto de semiángulo cónico 45° (la sección meridiana es un triángulo rectángulo), situado tal que la base del mismo rueda sin deslizar sobre ambos cilindros: el de radio a está fijo y el de radio b gira con velocidad angular ω_B. El vértice C del cono permanece en todo momento sobre la superficie cilíndrica B. Determinar:

1. La velocidad de rotación del cono y su eje instantáneo de rotación.
2. Velocidades de rodadura y pivotamiento del cono respecto al cilindro de radio b.
3. Aceleración angular del cono.
4. Axoides del movimiento del cono.
5. Supuesto que ambos cilindros giran, relación entre las velocidades angulares ω_A/ω_B para que el axoide fijo sea un plano. En este caso obtener el axoide móvil.



1.- Como el cono rueda sin deslizar sobre el cilindro fijo A, y el punto V es fijo, el eje instantaneo de rotación pasa por los puntos V e I.
Sea el sistema $Vxyz$ de la figura, que gira con $\dot{\psi}\boldsymbol{k}$; siendo $\dot{\psi}$ la componente según el eje de los cilindros del vector velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del cono.
Como $\tan\theta = \sqrt{3}$, la expresión de la velocidad angular del cono en los ejes $Vxyz$ es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\Omega\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}\Omega}{2}\boldsymbol{k} \qquad (1)$$



Por otra parte, el vector $\boldsymbol{IJ}$ es:

$$\boldsymbol{IJ} = (\sqrt{3}-1)a\boldsymbol{i} - (\sqrt{3}-1)a\boldsymbol{k} \tag{2}$$

Dado que la base del cono rueda sin deslizar sobre ambos cilindros; la velocidad del punto I es nula, y la del punto J del cono es la que le corresponde al punto J del cilindro:

$$\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{0} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{v}_J = \sqrt{3}a\omega\boldsymbol{j} \tag{4}$$

Relacionando (3) y (4) mediante la expresión del campo de velocidades del sólido:

$$\boldsymbol{v}_J = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{IJ}$$

se obtiene:

$$\Omega = \sqrt{3}\omega \tag{5}$$

Sustituyendo en (1), la expresión vectorial de $\boldsymbol{\Omega}$ queda:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\boldsymbol{i} + \frac{3\omega}{2}\boldsymbol{k} \tag{6}$$

2.- Las velocidades de rodadura y de pivotamiento respecto del cilindro B son, respectivamente, las componentes de la velocidad angular relativa tangente y normal a dicho cilindro, es decir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_{\text{rel}} &= \boldsymbol{\Omega} - \omega\,\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\boldsymbol{i} + \frac{\omega}{2}\boldsymbol{k} \\
\Omega_r &= \frac{3}{2}\omega \\
\Omega_p &= \frac{\sqrt{3}}{2}\omega
\end{aligned}$$

3.- Derivando el vector $\boldsymbol{\Omega}$ en los ejes $Vxyz$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \dot{\psi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} \tag{7}$$

Las componentes de la velocidad angular según el eje de los cilindros ($\dot{\psi}$) y según el eje de revolución del cono ($\dot{\varphi}$) se obtienen identificando:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\boldsymbol{i} + \frac{3\omega}{2}\boldsymbol{k}$$

de donde:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega \tag{8}$$
$$\dot{\psi} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega \tag{9}$$

Sustituyendo (9) en (7) y operando, se obtiene finalmente:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{4}\omega^2 \boldsymbol{j}$$

4.- El axoide fijo es un cono de revolución de vertice V, eje el de los cilindros y semiángulo cónico 30°.

El axoide móvil es otro cono de revolución, de vertice V, eje el del cono de vértice C y semiángulo 15°

5.- Para que el axoide fijo sea un plano, el eje instantáneo de rotación ha de coincidir con el eje Vx. En este supuesto, las velocidades de los puntos I y J alrededor del EIR son:

$$v_I = \sqrt{3}a\Omega \tag{10}$$
$$v_J = a\Omega \tag{11}$$

Por otra parte, las velocidades de estos puntos como pertenecientes a los respectivos cilindros, son:

$$v_I = a\omega_A a \tag{12}$$
$$v_J = \sqrt{3}a\omega_B \tag{13}$$

Eliminando Ω de (10), (11), (12) y (13), resulta:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = 3$$

En este caso, el axoide movil es un cono de revolución, de vertice V, eje el del cono de vertice C, y semiángulo 45°.