Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

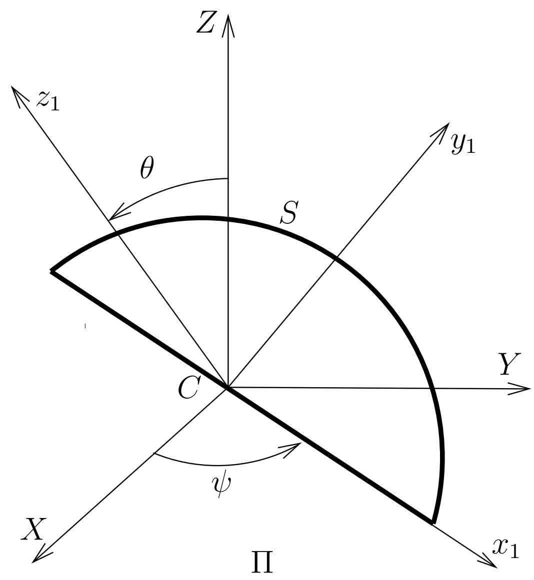
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de septiembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*N"o*	*Grupo*

Ejercicio 4"o Tiempo: 60 min.

Un sólido S está formado por una semicircunferencia de centro C, radio a y una barra de longitud $2a$ coincidente con el diámetro. La densidad se considera uniforme, siendo m la masa del sólido S.
Se considera un sistema de referencia $Cx_1y_1z_1$ ligado al sólido S de forma que Cx_1 coincide con el diámetro y Cz_1 es ortogonal al plano definido por S. Además se considera un sistema de referencia fijo $CXYZ$ de manera que CX es una recta fija del plano horizontal fijo Π y CZ es ortogonal al mismo.
El movimiento del sólido S es tal que el diámetro desliza sin rozamiento sobre el plano Π, siendo el centro C un punto fijo de dicho plano. En estas condiciones el movimiento del sólido queda completamente definido por dos parámetros ψ y θ. ψ es el ángulo formado por las rectas Cx_1 y CX y θ el ángulo formado por las rectas Cz_1 y CZ.



Se pide:

1. Expresar el tensor de inercia del sólido S en el punto C referido al sistema de referencia $Cx_1y_1z_1$.
2. Expresar la velocidad angular del sólido S en función de $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$.
3. Calcular $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ en función de θ sabiendo que en el instante inicial el plano de S es vertical, $\dot{\theta}_o = \omega_1$ y $\dot{\psi}_o = \omega_0$.
4. Calcular el módulo de la velocidad $\dot{\theta}_f$ cuando el plano del sólido S coincide con Π.

---

1. Sabiendo que la masa total del sólido $\mathcal{S}$ es m, la densidad lineal resulta

$$\lambda = \frac{m}{(\pi+2)a}$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes principales $Cx_1y_1z_1$:

$$I_{z_1} = \lambda(\pi a^3 + \frac{2}{3}a^3) = ma^2\frac{3\pi+2}{3(\pi+2)}$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{2}\lambda\pi a^3 = ma^2\frac{\pi}{2(\pi+2)}$$

$$I_{y_1} = I_{z_1} - I_{x_1} = ma^2\frac{3\pi+4}{6(\pi+2)}$$

$$\boldsymbol{I}_c = ma^2\begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} \qquad A = \frac{\pi}{2(\pi+2)}, \qquad B = \frac{3\pi+4}{6(\pi+2)}, \qquad C = \frac{3\pi+2}{3(\pi+2)}$$

La posición del centro de gravedad resulta:

$$CG = \frac{1}{m}\int_0^\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\lambda \mathrm{d}\theta = \frac{2a}{\pi+2}$$

2. La velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{K} = \dot{\theta}\boldsymbol{i}_1 + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j}_1 + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k}_1$$

3. El sistema tiene dos grados de libertad (θ, ψ) existiendo dos integrales primeras del movimiento:

$$\boxed{\boldsymbol{H}_C \cdot \boldsymbol{K} = H, \qquad T + V = E}$$

$$\dot{\psi} = \frac{H}{ma^2(A\cos^2\theta + B)} \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2}ma^2[A\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2(B + A\cos^2\theta)] + \frac{2mga}{\pi+2}\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = \omega_1$ y $\dot{\psi}_0 = \omega_0$ resulta:

$$\boxed{\dot{\psi} = \omega_0\frac{3\pi+4}{3\pi\cos^2\theta + 3\pi + 4}}$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \omega_1^2 - \frac{8g}{\pi a}(\operatorname{sen}\theta - 1) + \omega_0^2\frac{3\pi+4}{3\pi}\left(\frac{3\pi\cos^2\theta}{3\pi\cos^2\theta + 3\pi + 4}\right)}$$

4. Para la posición $\theta_f = 0$ la velocidad $\dot{\theta}_f$ resulta:

$$\boxed{\dot{\theta}_f^2 = \omega_1^2 + \frac{8g}{\pi a} + \omega_0^2\frac{3\pi+4}{6\pi+4}}$$