Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

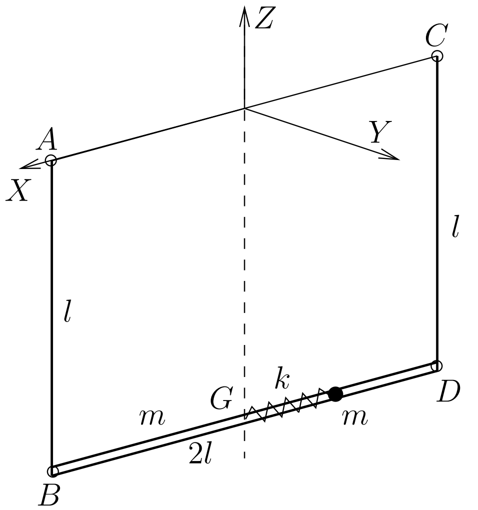
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de septiembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 60 min.

Un tubo BD de masa m, longitud $2l$ y sección despreciable, tiene sus extremos articulados a dos varillas AB y CD de masa despreciable y longitud l. Los extremos A y C de las varillas están articulados y fijos en la misma horizontal. El centro G del tubo está obligado a moverse según la vertical.

Por el interior del tubo se mueve sin rozamiento una masa puntual m unida a un muelle de constante k y longitud natural nula, que tiene el otro extremo anclado en G.



Se pide:

1. Expresar la velocidad de G en función del ángulo girado por el tubo alrededor del eje Z vertical.
2. Expresión de la energía cinética del sistema.
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
4. Linealizar las ecuaciones obtenidas en el apartado 3 para el caso de pequeñas oscilaciones.
5. Obtener las frecuencias propias del sistema.

Tomamos como grados de libertad del sistema el ángulo ψ que gira la varilla alrededor del eje vertical, y el desplazamiento x de la masa puntual por el interior del tubo medido a partir de G.

1.- Si la varilla gira un ángulo ψ, el punto B pasa a situarse en B', siendo las coordenadas de A, B y B':

$$\begin{aligned} A &= (l, 0, 0) \\ B &= (l, 0, -l) \\ B' &= (l\cos\psi, l\operatorname{sen}\psi, z_G) \end{aligned}$$

Imponiendo que $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AB'}|$ se obtiene:

$$z_G = -l\sqrt{2\cos\psi - 1} \tag{1}$$

y derivando se obtiene la velocidad de G:

$$\dot{z}_G = \frac{\dot{\psi} l \operatorname{sen}\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 1}} \tag{2}$$

2.- La energía cinética de la varilla es:

$$T_v = \frac{1}{2}m\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\psi}^2 l^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{1}{3}\right) \tag{3}$$

La energía cinética de la masa puntual es:

$$T_m = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{z}_G^2 + (x\dot{\psi})^2\right] = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\psi}^2 + \frac{l^2\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1}\right) \tag{4}$$

La energía cinética del sistema es la suma de las expresiones (3) y (4):

$$T = T_v + T_m = \frac{1}{2}m\dot{\psi}^2 l^2 \left(\frac{2\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + + \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{5}$$

3.- La expresión de la energía potencial del sistema es:

$$V = 2mgz_G + \frac{1}{2}kx^2 \tag{6}$$

Sustituyendo (1) en (6) resulta:

$$V = -2mgl\sqrt{2\cos\psi - 1} + \frac{1}{2}kx^2 \tag{7}$$

Con (5) y (7) es inmediato obtener la función lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\psi}^2 l^2 \left(\frac{2\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 2mgl\left(1 - \sqrt{2\cos\psi - 1}\right) - \frac{1}{2}kx^2$$

A partir de las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$\begin{aligned}
ml^2\left(\frac{2\operatorname{sen}^2\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{3}\right)\ddot{\psi} + 2ml^2\left(\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{2\cos\psi - 1} + \frac{\operatorname{sen}^3\psi}{(2\cos\psi - 1)^2}\right)\dot{\psi}^2 + & \\
+2mx\dot{x}\dot{\psi} + \frac{2mgl\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 1}} &= 0 \qquad (8) \\
m\ddot{x} - mx\dot{\psi}^2 + kx &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

4.- Para linealizar las ecuaciones (8) y (9), se suponen x, $\dot{x}$, ψ y $\dot{\psi}$ pequeños. Despreciando los infinitesimos de orden dos o superior, y sustituyendo el seno por el arco y el coseno por la unidad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}ml^2\ddot{\psi} + 2mgl\psi &= 0 \qquad (10) \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \qquad (11) \end{aligned}$$

5.- Como las ecuaciones (10) y (11) quedan desacopladas, el cálculo de las frecuencias propias es inmediato, obteniendose:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{6g}{l}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$