Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (26 de enero de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y dirigidas directamente a lo que se pregunta, escritas con letra clara y *a tinta*. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Un sólido libre (sin ninguna ligadura) está sometido a fuerzas exteriores $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i=1\dots m}$ de resultante $\boldsymbol{F}$ y momento en un punto O fijo $\boldsymbol{M}_O$. *Obtener*, aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio. *Discutir,* para un sistema que no sea rígido, si estas condiciones siguen siendo necesarias y suficientes para el equilibrio. (5.0 ptos.)

La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema con ligaduras lisas es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ compatibles}$$

En la expresión anterior no entran las fuerzas de reacción debidas a los enlaces internos del sólido rígido (que obligan a mantener invariable la distancia entre cada pareja de partículas), ya que el trabajo virtual neto del conjunto de estas fuerzas es nulo (se trata de enlaces lisos).

Los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces de sólido rígido pueden ser expresados a partir de una traslación $\delta \boldsymbol{r}_O$ y una rotación $\delta \boldsymbol{\varphi}$, ambas arbitrarias:

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i.$$

Sabiendo que $\boldsymbol{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i$, el trabajo virtual se puede expresar como:

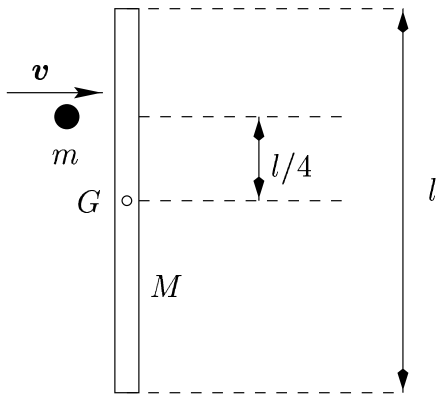
$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i \right) \\
&= \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_O, \delta \boldsymbol{\varphi}\}.
\end{aligned}$$

Al anularse esta expresión para valores arbitrarios de $\{\delta \boldsymbol{r}_O, \delta \boldsymbol{\varphi}\}$, resulta

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}.$$

En un sistema que no sea rígido las ecuaciones anteriores son condiciones necesarias, aunque no suficientes para el equilibrio del sistema. Basta pensar en un sistema no rígido en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momentos nulos y, sin embargo, no están en equilibrio, existiendo la posibilidad de deformaciones internas. El motivo es que $\{\delta \boldsymbol{r}_O, \delta \boldsymbol{\varphi}\}$ no representan con generalidad todos los posibles desplazamientos compatibles si el sistema no es rígido.

Una partícula de masa m choca elásticamente con velocidad $\boldsymbol{v}$ contra un sólido plano que se encuentra en reposo, produciéndose el impacto en un punto A de su borde liso, cuya normal es $\boldsymbol{n}$. El sólido se puede mover libremente dentro de su plano, sin ninguna restricción adicional. Denominando M a la masa del sólido, $\boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{AG}$ la posición del centro de masa, I_G el momento polar de inercia en G, *enumerar* para un caso general las incógnitas que definen el movimiento en el instante posterior al choque, y *expresar* las ecuaciones necesarias para su resolución. *Aplicar* al caso particular del impacto contra una barra homogénea de longitud l definido en la figura. (5.0 ptos.)



El número de incógnitas en general son 5: las dos componentes de la velocidad de la partícula después del choque ($\boldsymbol{v}'$), las dos componentes de la velocidad del CDM del sólido ($\boldsymbol{v}_G$), y la velocidad angular del sólido ($\Omega \boldsymbol{k}$). Sin embargo, considerando que la impulsión se produce según la dirección de la normal $\boldsymbol{n}$, se deduce inmediatamente que las componentes tangenciales de las velocidades de la partícula y de G deben conservarse:

$$v'_t = v_t = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}; \qquad v_{Gt} = \boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{t} = 0, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{t}$ el versor de la dirección tangencial, normal a $\boldsymbol{n}$.

Por tanto, quedan sólo tres incógnitas por resolver, ($v'_n = \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{n}$, $v_{Gn} = \boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{n}$, Ω). En primer lugar establecemos la conservación de la cantidad de movimiento del conjunto en dirección $\boldsymbol{n}$:

$$mv_n = mv'_n + Mv_{Gn}; \tag{2}$$

igualmente, establecemos la conservación del momento cinético del sistema respecto a G:

$$\boldsymbol{GA} \wedge m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{GA} \wedge m\boldsymbol{v}' + I_G \Omega \, \boldsymbol{k}. \tag{3}$$

Por último, la ecuación del coeficiente de restitución es:

$$e = 1 = -\frac{v'_n - [v_{Gn} + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GA}) \cdot \boldsymbol{n}]}{v_n}. \tag{4}$$

Las ecuaciones (2, 3, 4) resuelven las tres incógnitas planteadas.

Una vez resueltas estas ecuaciones, el valor de la impulsión sobre el sólido puede calcularse estableciendo el balance de cantidad de movimiento para el mismo: $I = Mv_{Gn}$.

Aplicación: Para el caso particular que se plantea, tomando direcciones (x, y) horizontal y vertical respectivamente y signo positivo para Ω en sentido horario, las ecuaciones son

$$\begin{gathered}
v'_y = v_{Gy} = 0; \\
mv = mv'_x + Mv_{Gx}; \\
mv\frac{l}{4} = mv'_x\frac{l}{4} + \frac{1}{12}Ml^2\Omega \\
-v = v'_x - (v_{Gx} + \Omega l/4)
\end{gathered}$$