Mecánica

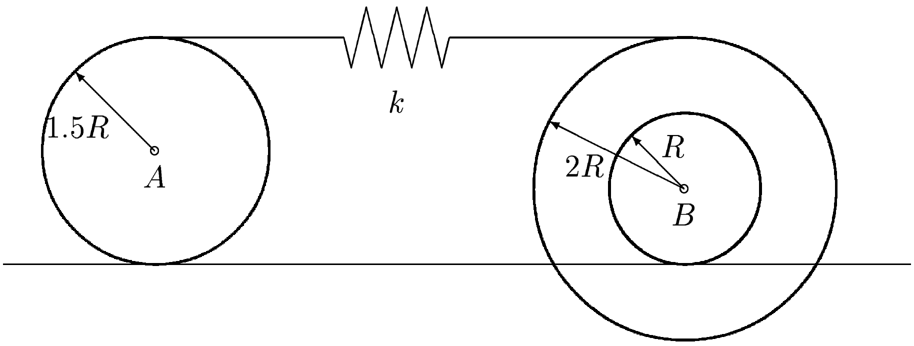
1^er^ EXAMEN PARCIAL (26 de enero de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Dos poleas A y B pueden rodar sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose verticales en todo instante y unidas mediante un hilo sin masa que se enrolla en el perímetro exterior de las mismas, con un resorte lineal de constante k en su centro. La masa de la primera polea es m_A y su radio $1.5R$, mientras que la masa de la otra es m_B y su radio exterior $2R$. La rodadura de la polea B sobre la recta se produce mediante un pequeño saliente de forma circular y radio R. Al ser este saliente pequeño, ambas poleas se pueden considerar como discos homogéneos.

Considerando que el hilo se mantiene tenso en todo instante y que es suficientemente largo para que el resorte central no llegue a tocar las poleas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.



Elegiremos como coordenadas libres del sistema los desplazamientos horizontales de cada una de las dos poleas, (x_A, x_B), positivos hacia la derecha, medidos desde una posición en que el muelle esté en su longitud natural (sin carga). La relación de estas coordenadas con el ángulo girado por cada polea es $\phi_A = x_A/1.5R$, $\phi_B = x_B/R$ (ángulos positivos en sentido horario). La energía cinética vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_A\left(\frac{3}{2}R\right)^2\right)\dot{\phi}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_B(2R)^2\right)\dot{\phi}_B^2 \\ &= \frac{3}{4}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{3}{2}m_B\dot{x}_B^2. \end{aligned} \tag{1}$$

El alargamiento del muelle proviene de sumar la separación de las poleas y el enrollamiento neto del hilo sobre las mismas,

$$\Delta l = (x_B - x_A) + \left(2R\phi_B - \frac{3}{2}R\phi_A\right) = 3x_B - 2x_A,$$

con lo cual el potencial es $V = \frac{1}{2}k(3x_B - 2x_A)^2$. Restando de (1) se obtiene la Lagrangiana, $L = T - V$, y derivando se deducen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{3}{2}m_A\ddot{x}_A - 2k(3x_B - 2x_A) = 0; \tag{2}$$

$$3m_B\ddot{x}_B + 3k(3x_B - 2x_A) = 0. \tag{3}$$