Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er EXAMEN PARCIAL (26 de enero de 1998)

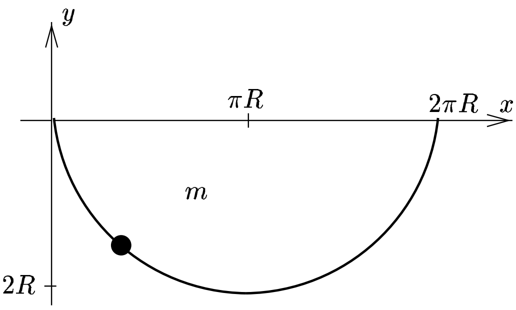
Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Bajo la acción de la gravedad, una partícula m se mueve sin rozamiento sobre la cicloide (ver figura adjunta) definida en forma paramétrica por las expresiones:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta); \quad y = -R(1 - \cos\theta),$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



1. Obtener la relación $s(\theta)$, siendo s la longitud de arco medido desde el punto más bajo de la cicloide ($\theta = \pi$).
2. Obtener la ecuación dinámica del movimiento (ecuación diferencial de orden 2 en $s(t)$).
3. Si la partícula se libera partiendo del reposo, desde la posición $\theta = \pi/2$, obtener el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la cicloide. Misma cuestión si parte del punto más alto ($\theta = 0$).

1.- El elemento de arco se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas del enunciado:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = R\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}. \tag{1}$$

Integrando entre π y una posición genérica θ resulta:

$$s(\theta) = -4R\cos\frac{\theta}{2}, \tag{2}$$

verificándose que $s(0) = -4R$, $s(\pi) = 0$ y $s(2\pi) = +4R$.

2.- La forma más directa de obtener la ecuación pedida es proyectar la ecuación fundamental de la dinámica en dirección tangencial,

$$m\ddot{s} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}. \tag{3}$$

Para ello debemos calcular la tangente unitaria, $\boldsymbol{t} = (dx/ds)\boldsymbol{i} + (dy/ds)\boldsymbol{j}$, derivando las ecuaciones paramétricas de la curva respecto del arco:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{dx/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{R(1-\cos\theta)}{2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2};$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{dy/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{-R\operatorname{sen}\theta}{2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = -\cos\frac{\theta}{2}.$$

Sustituyendo $\boldsymbol{F} = -mg\,\boldsymbol{j}$, la ecuación (3) queda

$$m\ddot{s} = mg\cos\frac{\theta}{2},$$

y teniendo en cuenta (2),

$$m\ddot{s} + \frac{mg}{4R}s = 0. \tag{4}$$

Otra forma de obtener esta misma ecuación habría sido a partir de la conservación de la energía, que empleando (2) para expresarla en función de s resulta

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - 2mgR\left[1 - \left(\frac{s}{4R}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Igualando a 0 la derivada de (5) para expresar su constancia se obtiene la misma ecuación (4).

3.- La ecuación (4) obtenida corresponde a un movimiento armónico simple, con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/(4R)}$ y periodo $\tau = 2\pi/\omega$. En los dos casos el tiempo empleado es el mismo y corresponde a un cuarto del periodo,

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Un movimiento con esta propiedad se denomina *tautócrono*.