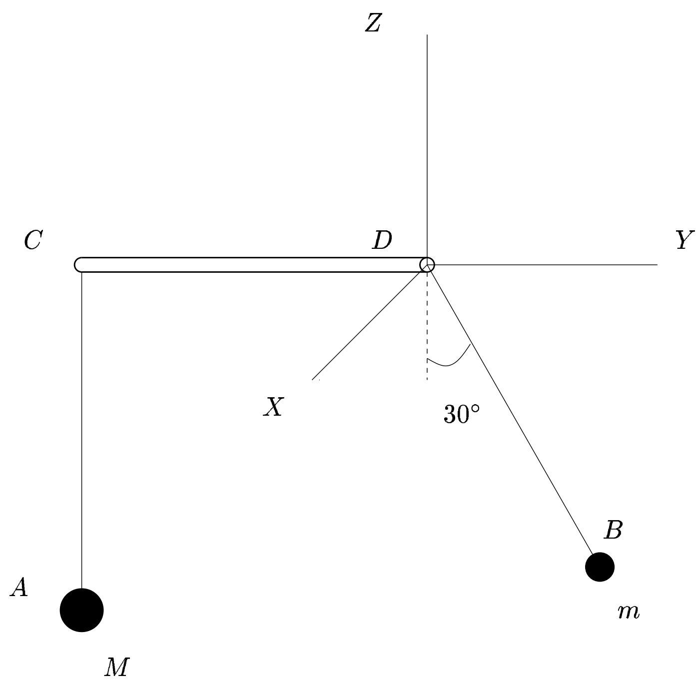
Mecánica

1$^{\underline{\text{er}}}$ EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (26 de Enero de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 60 min.

Un hilo AB (flexible, inextensible y de masa despreciable) de longitud $3b$ pasa a través de un tubo CD (fijo, horizontal y liso) de longitud b. En los extremos del hilo están sujetas sendas partículas, de masa M la que se encuentra en A, y de masa m la que se encuentra en B. En la situación inicial se cumple:



- El hilo sobresale por igual por ambos extremos del tubo (con lo que $AC = CD = DB = b$)
- Todo el hilo se encuentra situado en un plano vertical DYZ, colgando verticalmente el tramo AC, mientras que el tramo DB esta desviado 30° de la vertical descendente
- La partícula M está en reposo, mientras que la partícula m tiene velocidad horizontal $v_0 > 0$, dirigida según el eje X

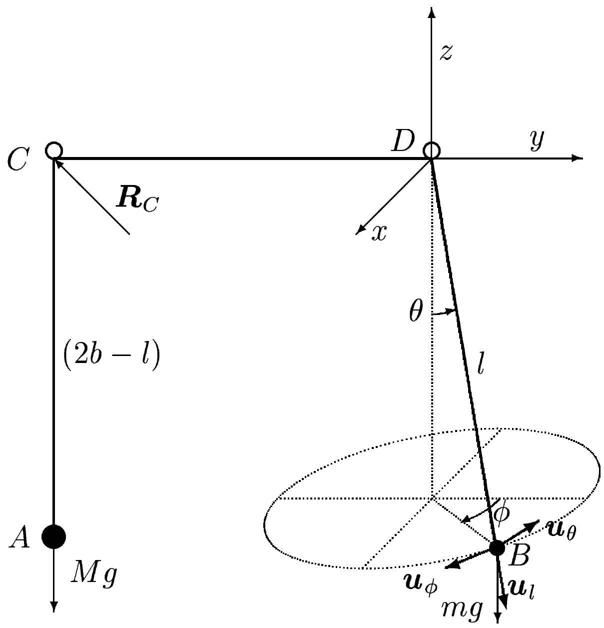
Se pide:

1. Expresar las ecuaciones diferenciales necesarias para definir completamente el movimiento, mediante los teoremas generales de Newton-Euler.
2. Integrales primeras del movimiento.
3. Demostrar que no es posible que m alcance el extremo D.
4. Calcular el valor de v_0 que hace que la masa M permanezca en reposo.

Tomamos como parámetros libres que definen la configuración del sistema (l, ϕ, θ), definidos en la figura siguiente. Aunque la partícula A estaría en principio libre para moverse lateralmente, al partir del reposo y no existir sobre ella otras fuerzas que no sean verticales, su movimiento llevará esta dirección. La distancia AC vale $(2b - l)$.

1.- Llamando T a la tensión del hilo, la ecuación dinámica de la partícula A es

$$M\ddot{l} = T - Mg \tag{1}$$



Para la partícula B proyectamos la ecuación dinámica según las direcciones $(\boldsymbol{u}_\phi, \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}_\theta)$, empleando coordenadas esféricas. Respectivamente estas ecuaciones son

$$m\left(2\dot{l}\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta + 2l\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + l\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \tag{2}$$

$$m\left(\ddot{l} - l\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta - l\dot{\theta}^2\right) = -T + mg\cos\theta \tag{3}$$

$$m\left(2\dot{l}\dot{\theta} - l\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + l\ddot{\theta}\right) = -mg\operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

Resultan pues 4 ecuaciones (1, 2, 3, 4) para 4 incógnitas (ϕ, l, θ, T). Eliminando T entre (1) y (3) se obtiene

$$(M+m)\ddot{l} - ml\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta - ml\dot{\theta}^2 = -Mg + mg\cos\theta \tag{5}$$

quedando de esta manera descrito el sistema mediante las ecuaciones (2, 4, 5).

2.- Las fuerzas que actúan (gravedad) son conservativas y los enlaces lisos, por lo que se conserva la energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}M\dot{l}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) - Mg(2b-l) - mg(l\cos\theta). \tag{6}$$

Particularizando para las condiciones iniciales ($l = b$, $\theta = 30°$, $\phi = 0$, $\dot{l} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = v_0/(b/2)$) evaluamos el valor de la constante, resultando

$$\frac{1}{2}M\dot{l}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mg(b-l) + mg\left(l\cos\theta - b\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{7}$$

Por otra parte, el momento de las fuerzas en D no tiene componente vertical. Para calcularlo tenemos en cuenta la reacción $\boldsymbol{R}_C = -T\boldsymbol{j} + T\boldsymbol{k}$, resultando

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_D &= (l\boldsymbol{u}_l)\wedge(-mg\boldsymbol{k}) + (-b\boldsymbol{j} - (2b-l)\boldsymbol{k})\wedge(-Mg\boldsymbol{k}) + (-b\boldsymbol{j})\wedge(-T\boldsymbol{j} + T\boldsymbol{k}) \\ &= -mgl\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\phi + Mgb\,\boldsymbol{i} - Tb\,\boldsymbol{i}\end{aligned} \tag{8}$$

En la ecuación anterior se comprueba que $\boldsymbol{M}_D \cdot \boldsymbol{k} =$, como se dijo. El momento cinético del conjunto es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_D &= (l\boldsymbol{u}_l) \wedge (m\boldsymbol{v}_B) + (-b\boldsymbol{j} - (2b-l)\boldsymbol{k}) \wedge (M\boldsymbol{v}_A) \\ &= -ml^2\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{u}_\theta + ml^2\dot{\theta}\, \boldsymbol{u}_\phi - Mb\dot{l}\, \boldsymbol{i} \end{aligned} \tag{9}$$

la componente vertical de (9) se conserva,

$$\boldsymbol{H}_D \cdot \boldsymbol{k} = -ml^2\dot{\phi} \operatorname{sen}^2\theta. \tag{10}$$

Estableciendo las condiciones iniciales se halla el valor de la constante, resultando

$$l^2\dot{\phi} \operatorname{sen}^2\theta = \frac{b}{2}v_0 \tag{11}$$

Puede comprobarse fácilmente que la derivada temporal de esta última ecuación equivale a (2).

3.- Si $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$, por la ecuación (11), para $l = 0$ necesitaría ser $\dot{\phi} = \infty$, lo que resulta imposible.

4.- La condición pedida implica $l = b$, $\dot{l} = \ddot{l} = 0$). Sustituyendo en la ecuación (5),

$$-mb\left(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = -Mg + mg\cos\theta. \tag{12}$$

Y haciendo lo mismo en (7),

$$\frac{1}{2}mb^2\left(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \theta^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgb\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{13}$$

Eliminando el término $\left(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \theta^2\right)$ entre (12) y (13) queda

$$\frac{1}{2}mgb\left(\frac{M}{m} - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgb\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{14}$$

Esta ecuación obliga a que θ tenga un valor constante a lo largo del movimiento, que deberá coincidir con el inicial, $\theta = 30°$. Sustituyendo este valor se obtiene

$$v_0^2 = gb\left(\frac{M}{m} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{15}$$

Por otra parte, particularizando valores en (11) se obtiene $\dot{\phi} = 2v_0/b$, y entrando con este y los demás valores en (4) se llega finalmente a

$$v_0^2 = \frac{gb}{2\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Para que se produzca el movimiento pedido se necesitan por tanto dos condiciones. En primer lugar, el valor de v_0 dado por (16). por otra parte, sustituyendo este valor en (15) se obtiene la relación que debe haber entre las masas

$$\frac{M}{m} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{17}$$