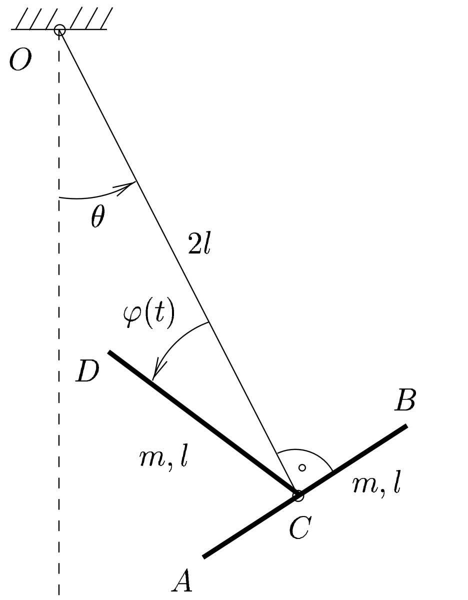
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (26 de Enero de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 6º Tiempo: 45 min.



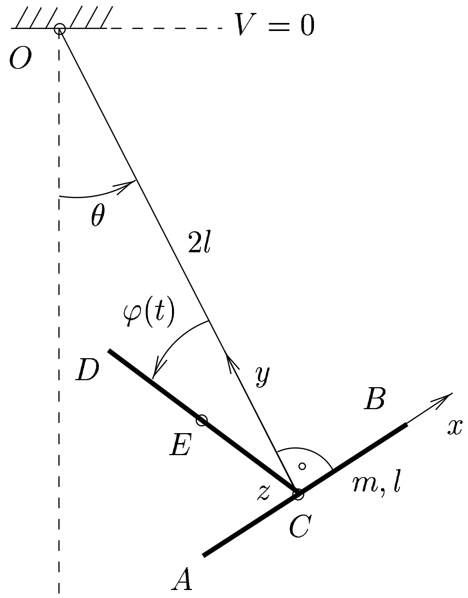
Se considera el siguiente mecanismo contenido en todo momento en un plano vertical:

- Un solido rígido compuesto por la barra AB, de masa m y longitud l, soldada perpendicularmente por su punto medio C a una varilla OC de masa despreciable y longitud $2l$. El punto O está fijo mediante una articulación.
- Una barra CD, de masa m y longitud l articulada en el punto C a la barra AB.

Se impone que la barra CD tenga un movimiento respecto de la varilla OC dado por la expresión $\varphi(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

Se pide:

1. Ecuación del movimiento.
2. Linealizar esta ecuación para pequeñas oscilaciones, admitiendo además que A_0 es pequeño.
3. Con la hipótesis del apartado anterior, valor de ω para que la amplitud máxima de θ crezca en el tiempo de forma indefinida.



1. Hay varias formas de obtener una ecuación diferencial en θ, único grado de libertad del sistema.
Un primer método puede consistir en aplicar los pricipios de la mecánica analítica. El primer paso es entonces calcular la función lagrangiana, que tiene la expresión:

$$
\begin{aligned}
L = T_{AB} + T_{CD} - V_{AB} - V_{CD} = \\
&= \frac{1}{2}(I_O)_{AB}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 \\
&+ mg2l\cos\theta + mg\left(2l\cos\theta - \frac{l}{2}\cos(\theta+\varphi)\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

siendo E el punto medio de la barra CD e $(I_O)_{AB}$ el momento polar de inercia de la barra AB respecto de O.

La velocidad del punto E se puede calcular haciendo uso de un sistema móvil auxiliar $(Cxyz)$ ligado a la barra AB. De esta forma, la velocidad absoluta se expresa en este sistema móvil:

$$\boldsymbol{v}_E = \left(2l\dot{\theta} - \frac{l}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} - \frac{l}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\,\mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{j}$$

Teniendo en cuenta que $(I_O)_{AB} = \frac{49}{12}ml^2$ y operando en (1), la expresión de la lagrangiana resulta:

$$L = ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{101}{24} - \cos\varphi\right) + ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\left(\frac{1}{3} - \cos\varphi\right) + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + mg\frac{l}{2}\left(8\cos\theta - \cos(\theta + \varphi)\right) \tag{2}$$

La ecuación de lagrange correspondiente tiene la expresión:

$$ml^2\ddot{\theta}\left(\frac{101}{12} - 2\cos\varphi\right) + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi + ml^2\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{3} - \cos\varphi\right)$$
$$+ ml^2\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi + mg\frac{l}{2}\left(8\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}(\theta + \varphi)\right) = 0 \tag{3}$$

Una forma alternativa de obtener la ecuación del movimiento es aplicar los principios generales de la dinámica de Newton-Euler; específicamente, el principio del momento cinético en el punto fijo O. El momento cinético de la barra AB en O, al ser el punto O un punto del sólido de velocidad nula, vale:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{AB} = (I_O)_{AB}\dot{\theta}\boldsymbol{k} = \frac{49}{12}ml^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

El momento cinético de la barra CD en O no puede calcularse de forma análoga, ya que O no es un punto de velocidad nula del sólido, sino que se obtiene mediante la expresión:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{CD} = \frac{1}{12}ml^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\boldsymbol{k} + m\boldsymbol{v}_E \wedge \boldsymbol{EO}$$

La expresión del momento cinético total en O es:

$$\boldsymbol{H}_O = (\boldsymbol{H}_O)_{AB} + (\boldsymbol{H}_O)_{CD} = \left(ml^2\dot{\theta}(\frac{101}{12} - 2\cos\varphi) + ml^2\dot{\varphi}(\frac{1}{3} - \cos\varphi)\right)\boldsymbol{k} \tag{4}$$

Al momento de las fuerzas externas sobre las dos barras sólo contribuye el peso:

$$\boldsymbol{M}_O = \left[-mg2l\,\mathrm{sen}\,\theta - mg\left(2l\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{l}{2}\mathrm{sen}(\theta + \varphi)\right)\right]\boldsymbol{k} \tag{5}$$

Derivando la expresión (4) e igualándola a (5), obtenemos de nuevo la ecuación (3).

2. Suponemos que $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ son pequeños, y despreciamos los términos cuadráticos en estas variables. Procediendo de ésta forma en la ecuación (3), obtenemos la expresión:

$$\frac{77}{12}ml^2\ddot{\theta} + \frac{7}{2}mgl\theta = \frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mgl\varphi = \left(-\frac{2}{3}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgl\right)A_0\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{6}$$

que no es sino la ecuación de un movimiento oscilatorio forzado por una acción externa armónica de pulsación angular ω.

3. El valor de ω pedido es el de resonancia, que al ser un movimiento no amortiguado coincide con la pulsación del movimiento armónico libre (ω_0):

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{7}{2}mgl}{\frac{77}{12}ml^2}} = \sqrt{\frac{6g}{11l}}$$