Mecánica

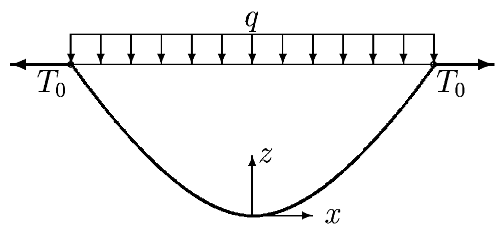
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (8 de Junio de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Deducir la forma de equilibrio de un hilo colgado de sus extremos, sometido exclusivamente a una carga repartida uniforme por unidad de abcisa (x). (4 ptos.)



Sea q la carga constante en dirección z perpendicular a x, y T la tensión del hilo en cada punto. Un elemento de longitud ds está sometido a la carga $q\,dx$, por lo que la carga repartida por unidad de longitud del hilo es $q\,(dx/ds)$.

La ecuación de equilibrio del hilo en dirección x arroja

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_x = T\frac{dx}{ds} = T_0 \text{ (cte.)} \tag{1}$$

La ecuación de equilibrio en dirección z a su vez expresa que

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = q\frac{dx}{ds} \tag{2}$$

Podemos transformar la ecuación (2) empleando la regla de la cadena y (1):

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(T_0\frac{dz}{dx}\right) = q\frac{dx}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(T_0\frac{dz}{dx}\right) = q. \tag{3}$$

Esta ecuación se puede integrar dos veces, resultando

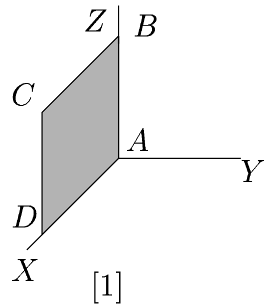
$$z = \frac{1}{2}\frac{q}{T_0}x^2, \tag{4}$$

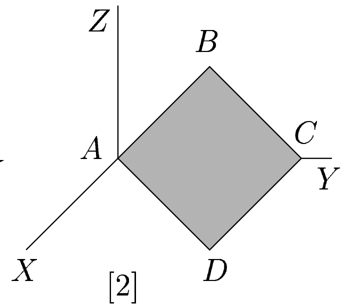
donde se ha supuesto como condiciones de borde de las integrales que

$$z|_{x=0} = 0, \;\; \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

La configuración de equilibrio es pues una parábola de eje vertical con vértice en $(0, 0)$.

Deducir la matriz de rotación que lleva al cuadrado $ABCD$ de la posición [1] a la posición [2] de la figura adjunta, teniendo en cuenta en esta última que el cuadrado está en el plano YZ. (3 ptos.)





Sean $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K})$ los versores del triedro fijo XYZ, e $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ los versores del triedro móvil xyz ligado al sólido, que coinciden inicialmente con los fijos (es decir, $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{AD}/|\boldsymbol{AD}|$, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{AB}/|\boldsymbol{AB}|$, $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}$). Basta con expresar cada uno de estos vectores en el sólido rotado en función de los fijos, y escribir estas relaciones matricialmente

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}=\cos(\pi/4)\,\boldsymbol{J}-\operatorname{sen}(\pi/4)\,\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{j}=-\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{k}=\operatorname{sen}(\pi/4)\,\boldsymbol{J}+\cos(\pi/4)\,\boldsymbol{K}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \|\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{J}\quad\boldsymbol{K}\|\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\ \sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}}^{\mathsf{R}}$$

La relación de transformación de coordenadas, entre el sistema de referencia del sólido (x,y,z) y el fijo (X,Y,Z) se obtiene teniendo en cuenta que $\boldsymbol{x}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}=X\,\boldsymbol{I}+Y\,\boldsymbol{J}+Z\,\boldsymbol{K}$. La matriz de transformación que resulta es la misma R antes expresada:

$$\begin{Bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\ \sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}$$

Esta última ecuación expresa la rotación, ya que transforma un vector $\|x\quad y\quad z\|^{\mathrm{T}}$ ligado al sólido en $\|X\quad Y\quad Z\|^{\mathrm{T}}$, mediante la matriz R.

Obtener las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa m sometida al campo gravitatorio simplificado (3 ptos.)

Tomaremos coordenadas cartesianas (x,y,z), siendo la gravedad de valor $(-g)$ en dirección z. La Lagrangiana vale $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$. Los momentos generalizados son

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x};\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y};\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}.\tag{5}$$

Por su definición, la función Hamiltonana vale $H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L$. Sin embargo, la expresión de H debe escribirse eliminando las velocidades $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ en favor de los momentos generalizados (p_x,p_y,p_z). Sustituyendo el valor de L en la expresión de H y eliminando las velocidades mediante las relaciones (5), resulta la expresión en función de las variables adecuadas:

$$H(p_x,p_y,p_z,x,y,z,t)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+mgz\tag{6}$$

Las ecuaciones canónicas se obtienen directamente derivando en (6):

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i\qquad\Rightarrow\qquad \dot{x}=\frac{p_x}{m};\ \dot{y}=\frac{p_y}{m};\ \dot{z}=\frac{p_z}{m}\tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i\qquad\Rightarrow\qquad \dot{p}_x=0;\ \dot{p}_y=0;\ \dot{p}_z=-mg;\tag{8}$$

De éstas, observamos que el primer grupo (7) coincide con las expresiones del cambio de variables (5). El segundo grupo (8) expresan la dinámica propiamente dicha.