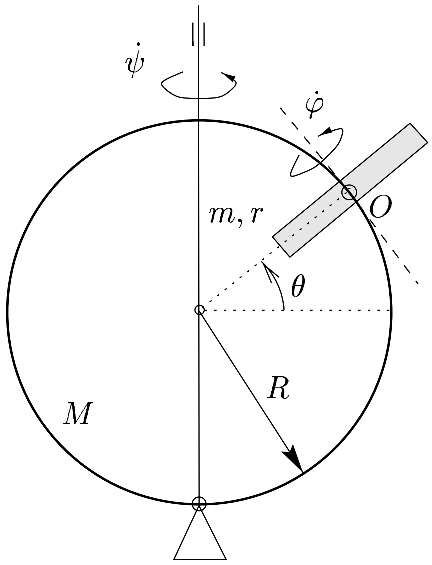
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de Julio de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 60 min.

Un disco homogéneo de masa m y radio r se encuentra insertado por su centro O a un aro de masa $M = 2m$ y radio $R = r$. La vinculación entre el disco y el aro se establece mediante una ligadura bilateral lisa de forma que el eje de revolución del disco permanece tangente en todo instante a la circunferencia que define el aro. El aro sólo puede girar alrededor de su diámetro vertical fijo, siendo $\dot{\psi}$ su velocidad angular. Sea θ el ángulo que forma el plano del disco con el plano horizontal que pasa por el centro del aro y $\dot{\varphi}$ la velocidad de rotación del disco alrededor de su eje. Se pide:



1. Expresar la velocidad angular del disco, en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas.
2. Expresar análogamente la energía cinética y potencial del sistema.
3. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y, en caso de existir, deducirlas.
4. Si inicialmente el disco se encuentra en posición horizontal ($\theta_0 = 0$) girando alrededor de su eje con velocidad ω ($\dot{\varphi}_0 = \omega$), el aro en reposo ($\dot{\psi}_0 = 0$) y la velocidad del centro del disco es nula, calcular la velocidad del centro del disco cuando se encuentre en el punto más bajo del aro. (Se supondrá que no existe ningún impedimento para que el disco recorra la totalidad del aro).

1.- Establecemos un triedro de referencia móvil $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que gira con el aro, de forma que $\boldsymbol{i}$ lleve la dirección del radio horizontal hacia la derecha, $\boldsymbol{j}$ la dirección del radio vertical hacia arriba, y $\boldsymbol{k}$ perpendicular al aro hacia fuera del papel, formando un triedro a derechas. Emplearemos también el triedro formado por los versores $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$ con $\boldsymbol{u}_r$ según la dirección radial del aro en O, $\boldsymbol{u}_\theta$ circunferencial, que constituyen un "triedro intermedio" ligado al disco salvo para su rotación propia $\dot{\varphi}$.

La velocidad angular total se compone como suma de la velocidad angular del aro ($\dot{\psi}\,\boldsymbol{j}$), la velocidad con la que el disco gira por el aro ($\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}$), y la rotación propia del disco, ($\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta$):

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\theta = \dot{\theta}\,\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_r + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\theta \tag{1}$$

2.- La energía cinética es suma de la del aro y la del disco,

$$T = T_{\text{aro}} + T_{\text{disco}} = \frac{1}{2}(I_y)_{\text{aro}}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}); \tag{2}$$

teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_O = \dot{\theta}r\,\boldsymbol{u}_\theta - \dot{\psi}r\cos\theta\,\boldsymbol{k}$ y que, en los ejes principales del disco (triedro intermedio) su tensor de inercia es $\boldsymbol{I}_O = \frac{1}{4}mr^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, la expresión resulta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{4}\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{5}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, tomando el origen en la posición $\theta = 0$, el potencial es

$$V = mgr\operatorname{sen}\theta. \tag{4}$$

3.- La Lagrangiana del sistema, a partir de (3) y (4), vale

$$L = \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{5}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] - mgr\operatorname{sen}\theta \tag{5}$$

De la expresión de L se deducen inmediatamente dos integrales primeras correspondientes a coordenadas cíclicas:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \quad\Rightarrow\quad p_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \text{cte.} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = 0 \quad\Rightarrow\quad p_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{1}{2}mr^2\left[2\dot{\psi}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\right] = \text{cte.} \tag{7}$$

Por otra parte, La Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, por lo que la integral de Jacobi proporciona otra constante del movimiento. En este caso, al no existir enlaces móviles, o lo que es equivalente, al ser la expresión de la energía cinética (3) homogénea cuadrática en función de las velocidades generalizadas, esta integral primera coincide con la conservación de la energía total:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{5}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] + mgr\operatorname{sen}\theta = \text{cte.} \tag{8}$$

4.- En primer lugar, evaluamos las constantes del movimiento aplicando las condiciones iniciales de este apartado en las ecuaciones (6), (7) y (8):

$$p_\varphi = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \frac{mr^2}{2}\omega; \tag{9}$$

$$p_\psi = \frac{1}{2}mr^2\left[2\dot{\psi}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\right] = \frac{mr^2}{2}\omega; \tag{10}$$

$$E = \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{5}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] + mgr\operatorname{sen}\theta = \frac{mr^2}{4}\omega^2. \tag{11}$$

El punto más bajo del aro es para $\theta = -\pi/2$; particularizando en la expresión (9), resulta

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi} = \frac{mr^2}{2}\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega \tag{12}$$

Empleando este resultado y particularizando en la expresión (10),

$$\frac{1}{2}mr^2\left[2\dot{\psi}\frac{5}{4}\right] = \frac{mr^2}{2}\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{2}{5}\omega \tag{13}$$

Por último, empleando los dos resultados anteriores y particularizando para el punto más bajo en (11), se deduce

$$\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{5}{4}\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2}{5}\omega\right)^2\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\omega^2\right] - mgr = \frac{mr^2}{4}\omega^2. \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{8}{5}\frac{g}{r} - \frac{4}{25}\omega^2 \tag{14}$$

La velocidad del centro del disco tiene la expresión general

$$v_O^2 = \dot{\theta}^2 r^2 + \dot{\psi}^2 (r\cos\theta)^2,$$

por lo que, sustituyendo,

$$v_O^2\big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}gr - \frac{4}{25}\omega^2 r^2. \tag{15}$$

Digamos por último que, para que el disco pueda pasar por la posición más baja, se debe cumplir la condición de compatibilidad $v_O^2 \geq 0$, lo que implica:

$$\omega^2 \leq 10\frac{g}{r}.$$