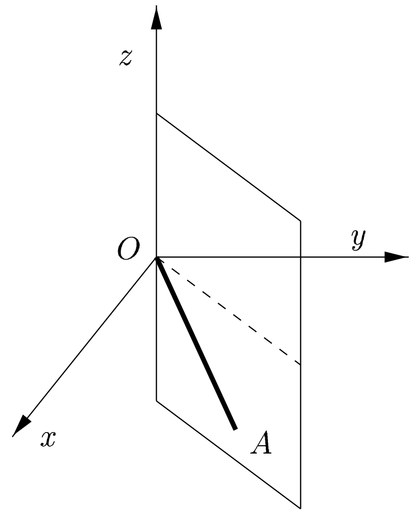
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de Julio de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 60 min.

Un rectángulo en posición vertical puede girar alrededor de uno de sus lados verticales (eje Oz). Su momento de inercia respecto al eje Oz es I. Una barra homogénea OA de longitud $2a$ y masa m está articulada en el punto fijo O y está obligada a permanecer en el rectángulo. Sobre el sistema actúa el campo gravitatorio simplificado. Se pide:



1. Calcular el potencial y la energía cinética del sistema.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Si se impone una velocidad de giro constante (ω_0) del rectángulo respecto de su eje,
   (a) Calcular la ecuación diferencial del movimiento;
   (b) Encontrar las posiciones de equilibrio relativo de la barra.;
   (c) Estudiar las pequeñas oscilaciones de la barra respecto de las posiciones de equilibrio relativo;
   (d) Estudiar la estabilidad de las posiciones de equilibrio.

1.- Denominamos ψ al giro del rectángulo alrededor de Oz, y θ al ángulo que forma la varilla OA con la vertical descendente. Además del triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligado a los ejes $Oxyz$ de la figura, emplearemos también el formado por $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})$, donde $\boldsymbol{t}$ lleva la dirección de OA, $\boldsymbol{n}$ es perpendicular a $\boldsymbol{t}$ dentro del plano del rectángulo, y $\boldsymbol{u}$ es normal al plano del rectángulo formando un triedro a derechas.

El potencial del sistema (tomando su origen para la varilla horizontal) es

$$V = -mga\cos\theta. \tag{1}$$

La velocidad de rotación (absoluta) de la varilla es

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{var}} = \dot\theta\,\boldsymbol{u} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{n} - \dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{t},$$

por lo que la energía cinética vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I\dot\psi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m(2a)^2\right)\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}I\dot\psi^2 + \frac{2}{3}ma^2\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta\right) \end{aligned} \tag{2}$$

2.- La Lagrangiana es, restando (2) y (1),

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2 + \frac{2}{3}ma^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + mga\cos\theta. \tag{3}$$

De los dos grados de libertad que posee el sistema, la coordenada ψ es cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \left(I + \frac{4}{3}ma^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\dot{\psi} = \text{cte.} \tag{4}$$

La ecuación de Lagrange en θ resulta

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}ma^2\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mga\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{5}$$

3.- Admitimos en lo que sigue que se produce una rotación impuesta $\dot{\psi} = \omega_0$ (cte.). El sistema queda definido por un único grado de libertad, θ.

a) Sustituimos $\dot{\psi} = \omega_0$ en (5):

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}ma^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mga\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{6}$$

b) En la ecuación (6), particularizamos para $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ (condición de equilibrio relativo):

$$-\frac{4}{3}ma^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mga\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{7}$$

En función de θ, esta ecuación tiene las siguientes soluciones:

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi; \tag{8}$$

$$-\frac{4}{3}ma^2\omega_0^2\cos\theta + mga = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \arccos\left(\frac{3g}{4a\omega_0^2}\right). \tag{9}$$

Para que exista esta última solución debe cumplirse que $\frac{3g}{4a\omega_0^2} \leq 1$.

c) Suponemos un movimiento con oscilaciones pequeñas en torno a una posición de equilibrio determinada, $\theta = \theta_0 + \epsilon(t)$. Para sustituir en (6) tendremos en cuenta que

$$\ddot{\theta} = \ddot{\epsilon}; \quad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta_0\cos\epsilon + \cos\theta_0\operatorname{sen}\epsilon; \quad 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta_0\cos 2\epsilon + \cos 2\theta_0\operatorname{sen}2\epsilon.$$

Sustituyendo y despreciando los infinitésimos de orden superior al primero, se obtiene

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\epsilon} - \frac{4}{3}ma^2\omega_0^2\cos 2\theta_0\,\epsilon + mga\cos\theta_0\,\epsilon = \frac{2}{3}ma^2\omega_0^2\operatorname{sen}2\theta_0 - mga\operatorname{sen}\theta_0$$

Comprobamos que para cualquiera de las soluciones halladas en (8), (9) el término a la derecha del signo $=$ en la ecuación anterior se anula, por lo que resulta

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\epsilon} + \left(-\frac{4}{3}ma^2\omega_0^2\cos 2\theta_0 + mga\cos\theta_0\right)\epsilon = 0 \tag{10}$$

d) La expresión (10) es una ecuación diferencial lineal de segundo grado en función de las oscilaciones ϵ. El valor de éstas permanecerá acotado si la solución es armónica, lo que exige que el coeficiente de ϵ en (10) sea positivo:

$$-\frac{4}{3}ma^2\omega_0^2 \cos 2\theta_0 + mga \cos \theta_0 > 0 \tag{11}$$

Verificando esta condición para las posiciones de equlibrio (8) y (9) se obtiene:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 & \text{estable si } \omega_0^2 < \frac{3g}{4a} \\ \theta_2 = \pi & \text{inestable} \\ \theta_3 = \arccos\left(\frac{3g}{4a\omega_0^2}\right) & \text{estable siempre que exista } (\omega_0^2 \geq \frac{3g}{4a}) \end{cases}$$

En definitiva, sólo hay una posición de equilibrio estable alrededor de la cual se puedan producir oscilaciones pequeñas. Esta posición es para el péndulo vertical ($\theta = 0$) si $\omega_0^2 \leq \frac{3g}{4a}$, y para el péndulo inclinado si $\omega_0^2 > \frac{3g}{4a}$.