Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

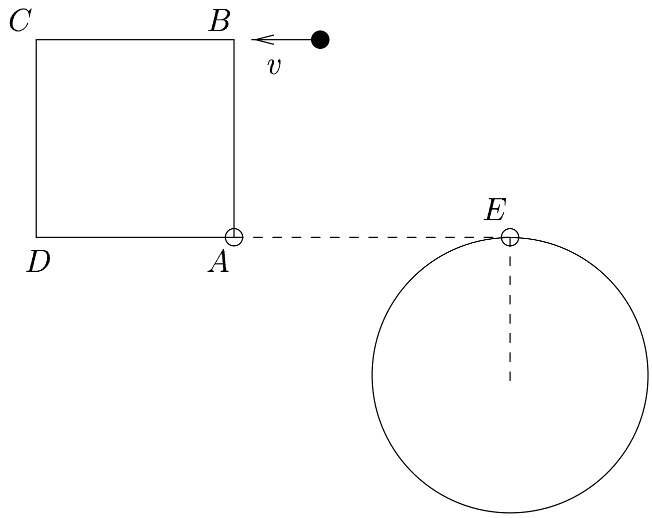
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de Julio de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 6º Tiempo: 45 min.

En un plano horizontal liso pueden moverse dos placas homogéneas, hechas del mismo material: una es circular (de radio r) y la otra es cuadrada (de lado $r\sqrt{2}$). La primera tiene fijo un punto E de su borde. La segunda tiene fijo uno de sus vértices, A, que dista $2r$ de E. Ambas placas se encuentran en reposo, en la disposición de la figura (donde, tanto el diámetro que pasa por E, como el lado AB, son perpendiculares a AE).
Un partícula (de masa m) incide normalmente, con velocidad v, sobre el lado AB, en un punto muy próximo a B. Se pide:



1. Suponiendo un valor cualquiera (no prefijado) e para el coeficiente de restitución, ¿cuál debe ser la mínima densidad superficial μ de la placa, para que después del choque, la partícula pueda quedar en reposo?.

2. Si la densidad superficial vale el doble del mínimo calculado, ¿cuánto debe valer el coeficiente de restitución e_1 entre partícula y placa, para que aquélla quede en reposo tras el choque?

3. Después del primer choque, el cuadrado se pone en movimiento, impactando a su vez con la placa circular en un punto a determinar de la misma. Si, tras chocar el cuadrado contra el disco, aquél queda en reposo, ¿cuánto valdrá el coeficiente de restitución e_2 entre las placas?

1.- En función de la densidad sperficial μ, la masa del cuadrado es $M_c = 2\mu r^2$, y su momento de inercia respecto al punto A vale $I_A = \frac{4}{3}M_c r^2 = \frac{8}{3}\mu r^4$.

Llamamos ω a la velocidad de rotación que adquiere el cuadrado después de la primera percusión (ω positiva en sentido antihorario), y v' a la velocidad de la partícula (positiva en el mismo sentido que la velocidad v de la figura).

Establecemos para la percusión las ecuaciones de balance de momento cinético en A del sistema conjunto cuadrado + partícula y del coeficiente de restitución:

$$mvr\sqrt{2} = I_A\omega + mv'r\sqrt{2} \tag{1}$$
$$-ve = v' - \omega r\sqrt{2} \tag{2}$$

Imponiendo la condición del enunciado ($v' = 0$), las ecuaciones anteriores arrojan:

$$\omega = \frac{ve}{r\sqrt{2}}; \quad I_A = \frac{2mr^2}{e},$$

es decir,

$$\mu = \frac{3}{4}\frac{m}{er^2}.$$

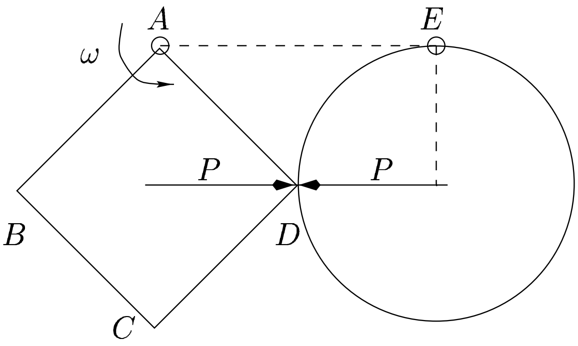
Considerando que el máximo valor posible para e es la unidad, resulta

$$\mu_{\min} = \frac{3}{4}\frac{m}{r^2}.$$

2.- Se considera $\mu = 2\mu\text{min} = \frac{3}{2}\frac{m}{r^2}$, con lo que $M_c = 3m$ y $I_A = 4mr^2$. Resolviendo para este valor las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{v}{r}; \quad e_1 = \frac{1}{2}$$

3.- Es fácil ver que, con el movimiento del cuadrado, éste impactará a través de su vértice D con el disco, en un punto del perímetro de éste situado en el extremo del radio horizontal (ver figura). Se produce una percusión horizontal P entre el cuadrado y el círculo. La velocidad angular del cuadrado antes de la percusión es ω. Después de la misma llamaremos ω_c y ω_d a las velocidades del cuadrado y del disco respectivamente.



Establecemos las ecuaciones de balance de momento cinético para el cuadrado en A, balance del momento cinético del disco en E, y coeficiente de restitución:

$$I_A\omega - Pr = I_A\omega_c \tag{3}$$

$$Pr = I_E\,\omega_d \tag{4}$$

$$-e_2\omega r = \omega_c r - \omega_d r \tag{5}$$

donde I_E es el momento de inercia del disco en E:

$$I_E = \frac{3}{2}(\mu\pi r^2)r^2 = \frac{9\pi}{4}mr^2$$

Imponiendo $\omega_c = 0$, de las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$\omega_d = \frac{16}{9\pi}\omega,$$

y mediante (5) finalmente

$$e_2 = \frac{16}{9\pi} = 0.5659.$$