Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sistema dinámico lineal de un grado de libertad, con masa m, amortiguamiento viscoso c (subcrítico) y resorte elástico de constante $k > 0$, sometido a una fuerza externa $f(t)$. 1) *escribir* la ecuación diferencial del movimiento y *describir* la naturaleza de su solución más general $x(t)$, *definiendo* los conceptos de régimen transitorio y permanente. 2) Si cambian únicamente las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$, *deducir* la influencia que tiene esta variación sobre el movimiento en régimen permanente. 3) Suponiendo $f(t) = A\,\mathrm{sen}(\Omega t)$ y $c = 0$, *obtener* la expresión de la solución general en el régimen transitorio, para unas condiciones iniciales genéricas $(x_0, \dot{x}_0)$. (5 ptos.)

1) La ecuación diferencial, en función de la coordenada x, es $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$. la solución general se compone como suma de dos términos, la solución general de la homogénea y una solución particular de la ecuación completa, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. La solución general de la homogénea es $x_h(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)\right]$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ y (a, b) constantes. Por su parte, $x_p(t)$ depende de la función de carga $f(t)$, pero al ser una solución particular, no depende de las condiciones iniciales. Debido al término exponencial decreciente, x_h tiende a 0 al aumentar t. Por esto, al cabo de suficiente tiempo la solución queda descrita por el *régimen estacionario* definido por $x_p(t)$, independiente de las condiciones iniciales. Por el contrario, se llama *régimen transitorio* al intervalo durante el que el valor de x_h es significativo y la solución debe expresarse como suma de los dos términos.

2) Supongamos dos soluciones de la homogénea (x_h^1, x_h^2), correspondientes a dos conjuntos de condiciones iniciales distintas. Expresando las soluciones completas y su diferencia:

$$\left.\begin{array}{l} x^1(t) = x_h^1(t) + x_p(t) \\ x^2(t) = x_h^2(t) + x_p(t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^1(t) - x^2(t) = x_h^1(t) - x_h^2(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \qquad (1)$$

Por tanto, las condiciones iniciales no tienen ninguna influencia sobre el régimen permanente.

3) La ecuación es ahora $m\ddot{x} + kx = A\,\mathrm{sen}(\Omega t)$. En primer lugar, ensayamos una solución particular del tipo general de la función de carga, $x_p(t) = B\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi)$. Derivando y sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos los valores de los parámetros $B = A/(k - m\Omega^2)$ y $\phi = 0$. Por otra parte, la solución general de la homogénea es $x_h(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$, siendo $\omega_0^2 = k/m$. Obligando a que la suma $(x_p + x_h)$ cumpla las condiciones iniciales, se obtienen los parámetros $a = \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{x}_0 - \frac{A\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$, $b = x_0$.

Explicar los conceptos de enlace holónomo y anholónomo. *Aplicarlos* escribiendo las ecuaciones de enlace para una esfera que rueda sin deslizar sobre un plano Oxy, descrita mediante las coordenadas (x, y, z) de su centro respecto de un triedro fijo y los parámetros angulares (ϕ, θ, ψ), siendo $\dot{\psi}$ la velocidad de pivotamiento y $(\dot{\phi}, \dot{\theta})$ las dos componentes de la velocidad angular según los ejes (x', y') respectivamente, pertenecientes a un triedro móvil que pivota con la esfera, (x', y', z'), donde z' se mantiene vertical en todo instante. (5 ptos.)

Suponemos un sistema mecánico descrito por coordenadas generalizadas $\{q_j,\ j = 1 \dots n\}$. Se denomina *enlace holónomo* aquél cuya ecuación de restricción se puede expresar como función exclusiva de las coordenadas y tiempo,

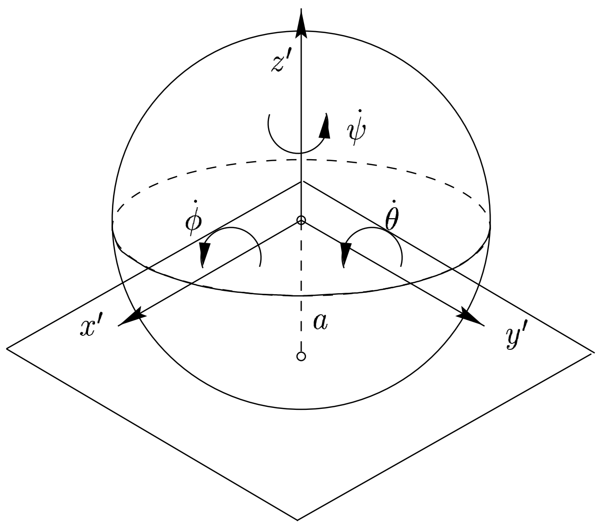
$$\Phi(q_j, t) = 0. \tag{1}$$

Se denomina *enlace anholónomo* (es decir, no holónomo) aquél que no puede ser descrito por una ecuación del tipo de la anterior, por ejemplo porque dependa además de las velocidades:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \tag{2}$$

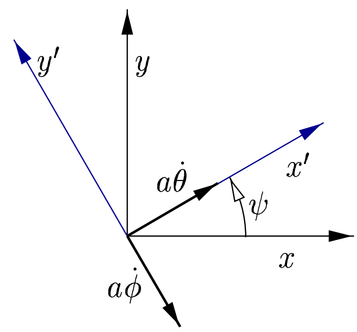
Se entiende que la expresión anterior no es integrable, ya que en caso contrario sería equivalente a un enlace de tipo holónomo.

Aplicación.- Sea una esfera de radio a, que rueda sin deslizar como indica el enunciado. Las componentes de la velocidad de rotación se definen en los ejes móviles indicados $(x'y'x')$, de forma que x' e y' permanecen horizontales en todo instante y pivotan con la esfera. Las coordenadas generalizadas son por tanto 6, $(x, y, z, \psi, \phi, \theta)$. Una primera ligadura es la que establece el contacto con el plano, obligando a que la altura del centro de la esfera sea igual al radio:



$$z = a \tag{3}$$

Este enlace es, como resulta obvio, holónomo.
Por otra parte, teniendo en cuenta la orientación de los ejes móviles respecto de los fijos (ver figura adjunta), la condición de rodadura sin deslizamiento obliga a las siguientes dos ecuaciones referidas a la velocidad del centro de la esfera:



$$\dot{x} = a\dot{\phi} \operatorname{sen} \psi + a\dot{\theta} \cos \psi, \tag{4}$$

$$\dot{y} = -a\dot{\phi} \cos \psi + a\dot{\theta} \operatorname{sen} \psi. \tag{5}$$

Estas dos ecuaciones resultan anholónomas.

La ligadura holónoma (3) permite eliminar la coordenada z, mientras que las otras dos ligaduras (4, 5) no pueden ser eliminadas de manera explícita, quedando el problema planteado con 5 parámetros sujetos a 2 ecuaciones de ligadura, es decir, posee 3 grados de libertad.