Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

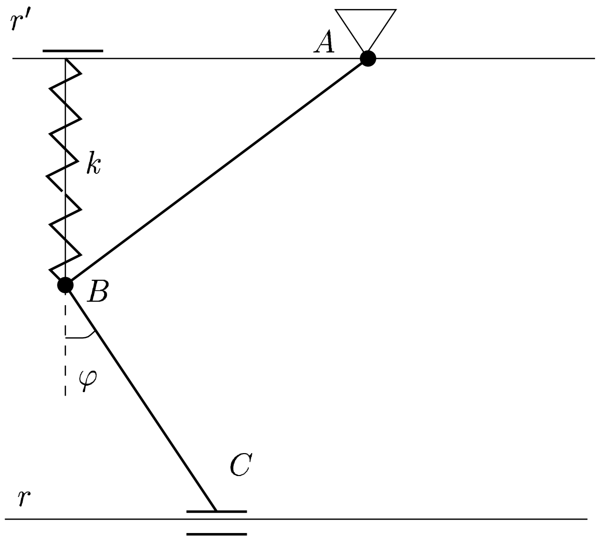
Mecánica

EXAMEN EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 90 min.

Dos varillas AB y BC, obligadas a moverse en un plano vertical fijo, están articuladas entre sí en su extremo común B. El extremo A de la varilla AB está articulado en un punto fijo y el extremo C de la varilla BC está obligado a deslizar sobre la recta horizontal lisa r. Las dos varillas tienen masa m y sus longitudes son $l_{AB} = b\sqrt{2}$ y $l_{BC} = b$. Un muelle de constante k y longitud natural nula tiene un extremo unido al punto B y el otro extremo desliza sobre una recta horizontal lisa r' que pasa por A, permaneciendo vertical a lo largo del movimiento. La distancia de r a r' es $2b$.



1. Encontrar las posiciones de equilibrio en función de φ y estudiar la naturaleza de las mismas según el valor de la constante elástica k
2. Para el caso en que $k = 0$ y la posición inicial del sistema es tal que $\varphi = 0$, el extremo C se desplaza ligeramente hacia la derecha. Se pide:
   (a) Ecuación diferencial del movimiento en función de φ
   (b) Velocidad angular de la varilla BC cuando C está en la vertical que pasa por A

1.- Adoptando como nivel de referencia del potencial gravitatorio la recta r', el potencial total del sistema expresado en función del grado de libertad φ resulta:

$$\begin{aligned} V &= \underbrace{-mg\frac{1}{2}(2b - b\cos\varphi)}_{V_{AB}} \underbrace{- mg(2b - \frac{b}{2}\cos\varphi)}_{V_{BC}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(2b - b\cos\varphi)^2}_{V_{muelle}} \\ &= -3mgb + mgb\cos\varphi + \frac{1}{2}k(2b - b\cos\varphi)^2. \end{aligned}$$

Las posiciones de equilibrio se obtienen anulando la derivada del potencial con respecto al parámetro φ:

$$\frac{dV}{d\varphi} = \operatorname{sen}\varphi \left[kb^2(2-\cos\varphi) - mgb\right] = 0,$$

de modo que resultan las siguientes posiciones de equilibrio:

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = 0 \tag{1}$$

$$\cos\varphi_2 = 2 - \frac{mg}{kb}. \tag{2}$$

A partir de la ecuación (1) se deduce que la única posición de equilibrio físicamente posible corresponde a $\varphi_1 = 0$. La segunda posición de equilibrio expresada a través de la ecuación (2) sólo es posible si se verifica la condición siguiente:

$$\left|2 - \frac{mg}{kb}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mg}{3b} \leq k \leq \frac{mg}{b}.$$

La estabilidad del equilibrio se garantiza si el potencial presenta un mínimo en los puntos de equilibrio. Si se impone que la derivada segunda sea positiva, se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = kb^2[\cos\varphi(2 - \frac{mg}{kb}) + 1 - 2\cos^2\varphi)]$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_1} = 1 - \frac{mg}{kb} > 0 \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{mg}{b}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_2} = 1 - \left(2 - \frac{mg}{kb}\right)^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mg}{3b} < k < \frac{mg}{b}$$

Resulta fácil comprobar, mediante el cálculo de la derivada cuarta del potencial, que para $k = \frac{mg}{b}$ y $k = \frac{mg}{3b}$ el equilibrio también resulta estable. De este modo las posiciones de equilibrio y su carácter en función de k resultan:

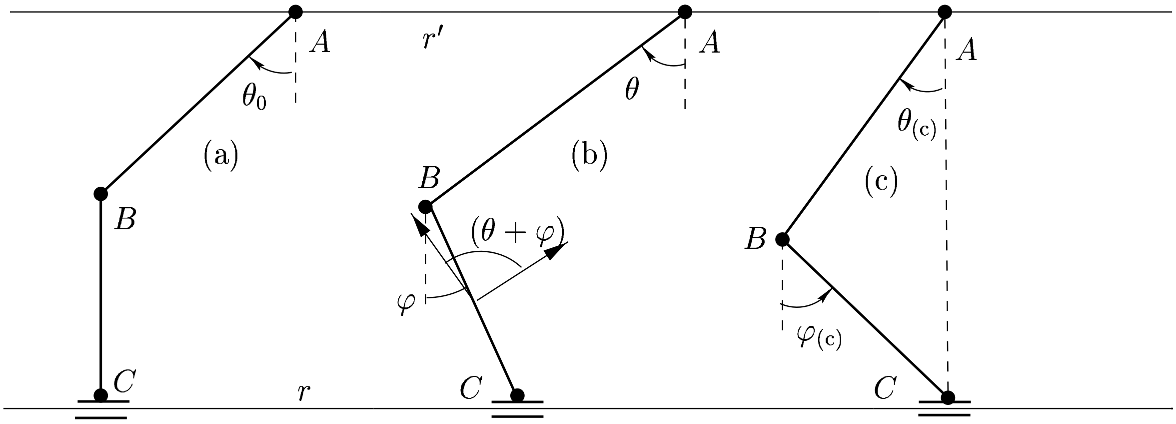
- $\boxed{0 < k < \frac{mg}{3b}}$ Equilibrio inestable en $\varphi = 0$.
- $\boxed{\frac{mg}{3b} \leq k < \frac{mg}{b}}$ Equilibrio inestable en $\varphi_1 = 0$ y equilibrio estable en $\cos\varphi_2 = 2 - \frac{mg}{bk}$.
- $\boxed{k \geq \frac{mg}{b}}$ Equilibrio estable en $\varphi = 0$.

2.- La posición inicial es de equilibrio inestable (posición (a) en la figura adjunta), por lo que la perturbación inicial produce un movimiento del sistema (posición (b)) por el que, en un cierto instante, el punto C estará situado en la vertical de A (posición (c)).

(a) Al tratarse de un sistema de 1 gdl en el que todas las fuerzas activas derivan de un potencial, la ecuación de conservación de la energía nos proporciona la ecuación diferencial buscada.

Sea θ el ángulo que forma la varilla AB con la vertical, la energía cinética del sistema resulta:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2}_{T_{AB}} + \underbrace{\frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\varphi}^2}_{T_{BC}}$$



Sabiendo que

$$V_G^2 = \left(\sqrt{2}b\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\dot{\varphi}\right)^2 - 2(\sqrt{2}b\dot{\theta})\left(\frac{b}{2}\dot{\varphi}\right)\cos(\theta+\varphi)$$

$$\cos\theta = \frac{2-\cos\varphi}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \dot{\theta} = -\dot{\varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{4\cos\varphi - \cos^2\varphi - 2}}$$

la energía total del sistema resulta:

$$\boxed{E = \frac{4}{3}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{mb^2}{6}\dot{\varphi}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}mb^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta+\varphi) + \frac{3}{2}mgb\cos\varphi + mg\frac{b\sqrt{2}}{2}\cos\theta} \qquad (3)$$

(b) Evaluando la ecuación de la energía (3) en el instante inicial (a) y en la posición pedida (c) se obtiene la velocidad angular $\dot{\varphi}_{(c)}$ de la varilla BC en dicho instante.

Sabiendo que en el instante inicial $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/4$ y $\dot{\theta}_0 = 0$. Y para la posición pedida se puede deducir facilmente que $\cos\varphi_{(c)} = 3/4$ y que, por tanto, $\cos\theta_{(c)} = 5\sqrt{2}/8$ y $\dot{\theta}_{(c)} = -\dot{\varphi}_{(c)}$:

$$\begin{aligned} E_0 &= 2mgb \\ E_f &= \frac{7}{4}mb^2\dot{\varphi}_{(c)}^2 + \frac{7}{4}mgb \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones se obtiene finalmente:

$$\boxed{\dot{\varphi}_{(c)} = \sqrt{\frac{g}{7b}}}$$