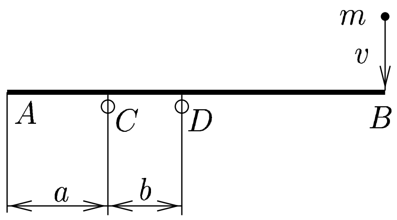
Mecánica

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE (17 de Septiembre de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 45 min.

Una barra homogénea AB de densidad lineal μ puede moverse sobre un plano horizontal liso. Inicialmente se encuentra en reposo, muy próxima a dos clavos fijos lisos C y D que distan entre sí b, conociéndose además la distancia $AC = a$. Una partícula de masa m incide normalmente sobre AB en un punto muy próximo al extremo B con velocidad v. Se pide:



1. Si las distancias a y b son dadas, calcular la longitud mínima L que debe tener la barra AB para que ésta, después de recibir el impacto de la partícula, no choque contra ninguno de los dos clavos, demostrando que L es independiente del coeficiente de restitución e que exista entre partícula y barra.

2. Si ahora se considera que $AB = 2(a + b)$, siendo $a + b$ un valor dado:

   a) Encontrar el valor máximo de $\lambda = \frac{a}{b}$ para que, tras el impacto de la partícula, la barra no choque contra el clavo C.

   b) Si $\frac{a}{b} = \lambda$, encontrar el valor R de la percusión reactiva que se producirá en el clavo D si se considera que todos los choques son perfectamente elásticos.

NOTA: Debe tenerse en cuenta que, al no estar inicialmente en contacto la barra con los clavos C y D, las percusiones que se producirían entre éstos y la barra no ocurrirían simultáneamente a la primera percusión entre la barra y m, sino después de transcurrido un intervalo de tiempo muy corto.

1.- Como m incide normalmente sobre una barra lisa, la percusión P entre ambos cuerpos llevará esta dirección normal. Denominamos v' a la velocidad de m después del choque, v_G la velocidad del centro G de la barra (ambas se considerarán positivas en sentido vertical descendente), y ω la velocidad angular de la misma (positiva en sentido horario). Planteamos las ecuaciones de balance en el sistema conjunto (partícula + barra).

1. Conservación de la cantidad de movimiento:

$$mv = mv' + \mu L v_G \tag{1}$$

2. Conservación del momento cinético en G:

$$mv\frac{L}{2} = mv'\frac{L}{2} + \frac{1}{12}\mu L^3 \omega \tag{2}$$

Eliminando v' entre (1) y (2) se obtiene

$$v_G = \frac{L}{6}\omega, \tag{3}$$

resultado que tiene una interpretación general: toda barra golpeada en un extremo (por una partícula o de cualquier otra forma) en dirección normal a la misma, sin restricciones en su posible movimiento, adquiere un movimiento equivalente a una rotación instantánea alrededor de un punto I situado a distancia $L/6$ del centro de la barra, del lado opuesto a la percusión.

Todos los puntos situados a la derecha de I tendrán velocidad dirigida hacia el semiplano en el que se encuentran los clavos. Si se pretende que la barra no choque contra ellos, es evidente que I debe quedar a la derecha de D, o a lo sumo junto a él, por lo que obtenemos:

$$\overline{AD} = a + b = \overline{AG} - \overline{IG} = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{L}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 3(a+b)} \tag{4}$$

Este resultado, como se ve, se obtiene de forma independiente del valor del coeficiente de restitución entre la partícula y la barra, siendo válido para cualquier percusión en B.

2.- Ahora el centro G queda justo sobre D, mientras que el c.i.r. I queda a su izquierda, a una distancia $L/6$. Por tanto, en el movimiento posterior a la primera percusión de la partícula m, la barra chocará al menos con el clavo D.

a) Para que la barra no choque contra C, es evidente que I debe quedar a la izquierda de C, o a lo sumo junto a él, por lo que obtenemos:

$$\overline{ID} = \frac{2(a+b)}{6} \leq \overline{CD} = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{a}{b} \leq 2}. \tag{5}$$

Con esto, conseguimos que la barra, inmediatamente después del choque con m, no golpee contra C, sino sólo contra D. Queda por demostrar que, tras este choque contra D, la barra no golpeará a C. Esta demostración es muy fácil, puesto que al coincidir G con D, la percusión del choque en este clavo no producirá momento en G, con lo que no se alterará la ω de la barra, que seguirá teniendo el sentido de las agujas del reloj. Como, tras chocar contra D, v_G está dirigida hacia el semiplano en el que no se encuentran los dos clavos, la velocidad del punto situado inicialmente junto a C irá en ese mismo sentido (al resultar de sumar dos componentes según él), con lo que se alejará de C, quedando garantizado que no chocará contra él.

b) Además de las ecuaciones (1) y (2) podemos expresar la del coeficiente de restitución, cuyo valor se nos dice que es $e = 1$:

$$v' - \left(v_G + \omega\frac{L}{2}\right) = -v \tag{6}$$

Entre estas tres ecuaciones se resuelve para (v_G, ω, v'):

$$v_G = \frac{2m}{\mu L + 4m}v; \quad \omega = \frac{12m}{\mu L + 4m}\frac{v}{L}; \quad v' = \frac{-\mu L + 4m}{\mu L + 4m}v; \tag{7}$$

La percusión reactiva R en D es elástica, por lo que el balance de cantidad de movimiento en este segundo choque resulta

$$R + \mu L v_G = \mu L(-v_G) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 2\mu L v_G = \frac{4\mu L m}{\mu L + 4m}v}. \tag{8}$$