Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

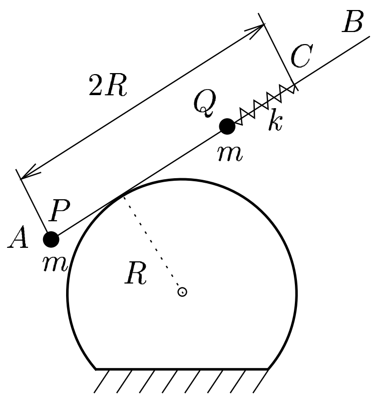
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL ORDINARIO (14 de Junio de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

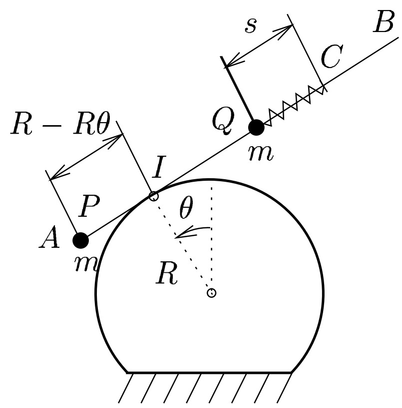
Ejercicio 4.º (***puntuación doble***) Tiempo: 90 min.

Una varilla sin masa AB puede moverse en un plano vertical manteniéndose tangente a una circunferencia fija de radio R, sobre la que rueda sin deslizar. El extremo A de la varilla tiene soldada una partícula P de masa m, y existe otra partícula Q de masa m que puede deslizar sin rozamiento ensartada en la varilla. Cuando la varilla está horizontal, su punto de tangencia está a una distancia R de A. Entre la partícula Q y el punto C de la varilla, que dista $2R$ del extremo A, existe un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. Se supone que la varilla es lo suficientemente larga como para que la partícula Q no la abandone nunca, y que ni las partículas ni el resorte interfieren a la rodadura de la varilla.



Se pide:

1. Ecuaciones dinámicas generales del movimiento.
2. Determinar las posiciones de equilibrio para el caso en que $k > \frac{mg}{2R}$, y demostrar que sólo una de ellas es estable.
3. Demostrar que si $k < \frac{mg}{2R}$ la posición de equilibrio estable obtenida en el apartado 2 es en este caso inestable. Comprobar además que en este caso existe una nueva posición de equilibrio, expresando la ecuación que permitiría su cálculo.
4. Estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable que resulta con $k = \frac{mg}{R}$, calculando las frecuencias propias y los modos normales de vibración.



1.- La Lagrangiana del sistema se expresa como:

$$L = \frac{1}{2}mv_P^2 + \frac{1}{2}mv_Q^2 - V_{grav} - V_{resorte} \qquad (1)$$

El sistema tiene dos grados de libertad, y su configuración se parametriza mediante el ángulo (θ) que forma el radio que sitúa el punto de contacto I de varilla con la vertical y la distancia (s) de la partícula Q al punto C.

Como rueda sin deslizar, la distancia entre el punto de contacto I y el extremo A de la varilla debe ser igual a $\overline{IA} = (R - R\theta)$. Empleando estas coordenadas (θ, s), es necesario obtener las expresiones correspondientes de cada término de (1).

La velocidad de la partícula P coincide con la del extremo A de la varilla. Por otro lado, puesto que ésta rueda sin deslizar, el CIR de su movimiento se sitúa en cada instante en el punto (I) de contacto con la circunferencia, por lo que v_P es perpendicular a la varilla, resultando:

$$v_P^2 = (R - R\theta)^2\dot{\theta}^2$$

La velocidad de la partícula Q puede obtenerse como la suma de su velocidad relativa a la varilla $(\dot{s})$ y de arrastre, resultando:

$$v_Q^2 = \dot{s}^2 + (R - s + R\theta)^2\dot{\theta}^2$$

(Una forma alternativa algo más laboriosa, aunque más sistemática, de obtener las velocidades de P y Q sería derivar sus coordenadas respecto de un sistema fijo, siendo posible comprobar que se obtienen los mismos resultados.)

La energía potencial total, suma de la gravitatoria y la del resorte, con base en las consideraciones geométricas anteriores, se expresa como:

$$V = mg\left[2R(\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1) - s \operatorname{sen}\theta\right] + \frac{1}{2}ks^2 \qquad (2)$$

donde el nivel de referencia del potencial gravitatorio se ha fijado en la tangente por el punto más alto de la circunferencia.

Empleando los resultados anteriores, la Lagrangiana se expresa:

$$L = \frac{1}{2}m(R - R\theta)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{s}^2 + (R - s + R\theta)^2\dot{\theta}^2\right] - mg\left[2R(\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1) - s \operatorname{sen}\theta\right] - \frac{1}{2}ks^2$$

con lo que se obtienen las correspondientes ecuaciones de Lagrange:

$$m\ddot{\theta}\left[R^2(1-\theta)^2 + (R - s + R\theta)^2\right] + m\dot{\theta}^2 R(2R\theta - s) - 2m\dot{\theta}\dot{s}\,(R - s + R\theta) + mg\cos\theta(2R\theta - s) = 0 \qquad (3)$$

$$m\ddot{s} + m(R - s + R\theta)\dot{\theta}^2 - mg\operatorname{sen}\theta + ks = 0 \qquad (4)$$

2.- Las posiciones de equilibrio se obtienen hallando los extremos de la función potencial (2):

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta(2R\theta - s) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -mg\operatorname{sen}\theta + ks = 0 \qquad (6)$$

Despejando s en (6) e introduciéndola en (5) se obtiene la ecuación:

$$\cos\theta(2R\theta - \frac{mg}{k}\sin\theta) = 0$$

Esta ecuación admite varias soluciones. En primer lugar:

$$\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} \\ \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La primera solución $\theta_1 = \pi/2$ no es posible puesto que implica que el arco rodado es $\pi R/2 > R$, y la varilla no tiene longitud suficiente por ese lado. La solución $\theta_2 = -\pi/2$ sí que es posible y existe siempre independientemente del valor de k. Por otro lado, existen otras soluciones dadas por las raíces de la expresión:

$$2R\theta - \frac{mg}{k}\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{k}{(mg/2R)}}_{\alpha}\theta - \sin\theta = 0$$

La posición $\theta_3 = 0$ siempre es solución de esta expresión. Además, en el caso en que $k > \frac{mg}{2R}$ (es decir, $\alpha > 1$) esta solución es única, como se puede deducir de la Figura 1.

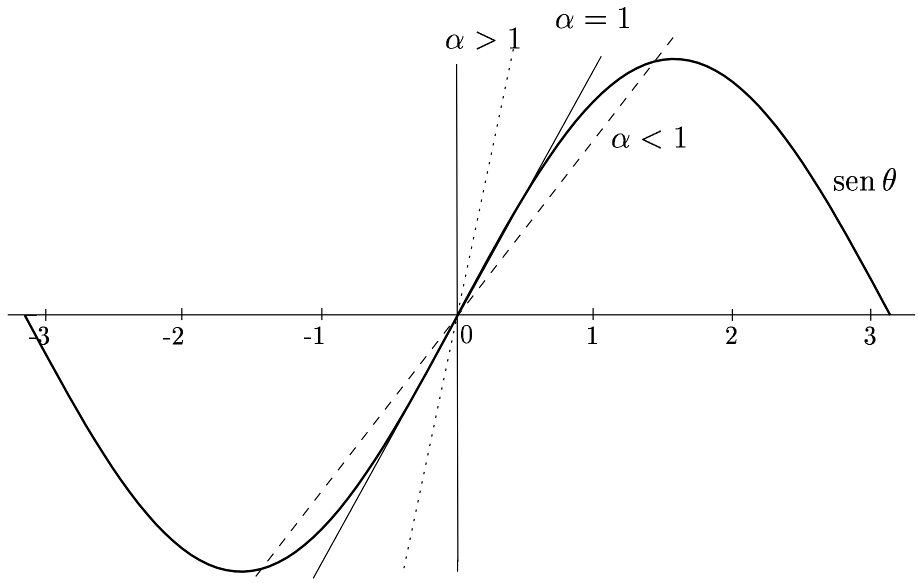


Figura 1: *Discusión gráfica de la existencia de raíces de la expresión* $\alpha\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$

Sólo existen, por tanto, dos soluciones: $(\theta_2 = -\pi/2,\ s_2 = -mg/k)$ y $(\theta_3 = 0,\ s_3 = 0)$. La estabilidad de estas posiciones se estudia mediante el Hessiano:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -mg\operatorname{sen}\theta(2R\theta - s) + 2Rmg\cos\theta & -mg\cos\theta \\ -mg\cos\theta & k \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse que para que la posición $(\theta_2,\ s_2)$ sea estable ($\mathbf{H}$ es definida positiva) sería necesario $k < \frac{mg}{\pi R} < \frac{mg}{2R}$, por lo que esta posición resulta inestable. La posición $(\theta_3,\ s_3)$ da lugar a $\mathbf{H}$ definido positivo cuando $k > \frac{mg}{2R}$, por lo que resulta ser la única posición estable que existe en estas condiciones.

3.- Si $k < \frac{mg}{2R}$, el Hessiano asociado a la solución $(\theta_3 = 0,\ s_3 = 0)$ resulta ser definido negativo, por lo que esta posición de equilibrio, que con $k > \frac{mg}{2R}$ era estable, resulta ser inestable con este nuevo supuesto.

A partir de la Figura 1 se aprecia además que con $k < \frac{mg}{2R}$ (es decir, $\alpha < 1$ en la figura), aparece una nueva solución, que es la raíz de la expresión:

$$\alpha\theta - \operatorname{sen}\theta = 0 \quad ; \qquad \alpha < 1 \quad , \quad \theta \neq 0$$

4.- Si $k = \frac{mg}{R}$, la única posición de equilibrio estable es $(\theta = 0,\ s = 0)$, tal y como se ha justificado en el segundo apartado.

Las ecuaciones del movimiento de pequeñas oscilaciones resultan de linealizar las ecuaciones (3) y (4) para pequeñas variaciones de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, s, \dot{s}, \ddot{s}$, y tienen la expresión:

$$2mR^2\ddot{\theta} + 2mgR\theta - mgs = 0$$
$$m\ddot{s} - mg\theta + ks = 0$$

Las matrices de masa ($\mathbf{M}$) y rigidez ($\mathbf{K}$) asociadas al vector $\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = (\theta,\ s)$ son:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2mR^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mgR & -mg \\ -mg & k \end{pmatrix}$$

El polinomio característico resulta:

$$|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2R^2\lambda^2 - 4gR\lambda + g^2 = 0$$

y sus raíces permiten obtener las frecuencias propias:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{g}{R}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{g}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Los modos normales (aceptando como criterio de normalización que la primera componente del vector sea la unidad) resultan de sustituir (λ_1, λ_2) en el sistema dependiente $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} = \mathbf{0}$, resultando:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -\sqrt{2}R) \quad , \quad \mathbf{a}_2 = (1, \sqrt{2}R)$$