Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

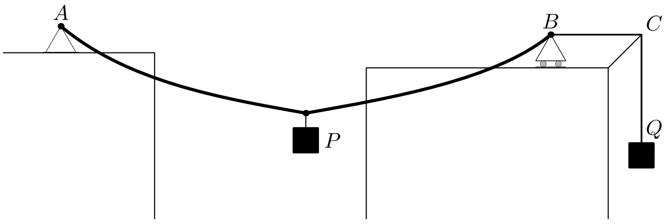
# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 3.º* Tiempo: 45 min.

Un hilo homogéneo de peso unitario $q$ y longitud total $s$, tiene su extremo $A$ sujeto a un punto fijo. El otro extremo $B$ está unido a una deslizadera que a su vez, está sometida a la acción de un contrapeso $Q$, tal como se indica en la figura. En el centro del hilo hay una carga de valor $P$. Se pide:




1. Forma de equilibrio del hilo, calculando la flecha vertical del punto medio y la distancia horizontal entre $A$ y $B$, para los valores numéricos siguientes: $q = 10\,\mathrm{kgf/m}$, $s = 200\,\mathrm{m}$, $Q = 20\,000\,\mathrm{kgf}$ y $P = 10\,000\,\mathrm{kgf}$.
2. Calcular el aumento de flecha en función del aumento de la carga central para pequeñas variaciones de la misma. Discutir la estabilidad del equilibrio a partir de este resultado.

---

**1.-** El contrapeso $Q$ es la tensión horizontal de la catenaria $AB$. De ahí se obtiene el parámetro de la catenaria:

$$a = \frac{Q}{q} = 2\,000\,\mathrm{m}.$$

El peso intermedio $P$ se reparte entre los dos tramos de catenaria que son simétricos. Obligando a que el esfuerzo vertical en el punto de aplicación del peso $P$ (que en lo sucesivo llamaremos $M$) sea $P/2$, se obtiene la abscisa del punto $M$, medida desde el vértice de la catenaria (en lo sucesivo y teniendo en cuenta la simetría trabajaremos con la catenaria de la derecha):

$$\frac{P}{2} = qa \operatorname{senh}\left(\frac{x_M}{a}\right), \tag{1}$$

de donde resulta:

$$x_M = 494{,}933\,\mathrm{m}.$$

Por otro lado, la ecuación que expresa la longitud del hilo entre el punto medio $M$ y el extremo $B$ es

$$100 = s_{MB} = a \operatorname{senh}\left(\frac{x_B}{a}\right) - a \operatorname{senh}\left(\frac{x_M}{a}\right) = a \operatorname{senh}\left(\frac{x_B}{a}\right) - \frac{P/2}{q}, \tag{2}$$

de donde se deduce

$$x_B = a \operatorname{argsenh}\left(\frac{100+500}{a}\right) = 591{,}346\,\mathrm{m}. \tag{3}$$

La distancia horizontal entre $A$ y $B$ resulta ser:

$$l = 2(x_B - x_M) = 192{,}826\,\mathrm{m},$$

y la flecha se obtiene usando la ecuación de la catenaria:

$$f = a\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - a\cosh\left(\frac{x_M}{a}\right) = 26{,}508\,\mathrm{m}. \tag{4}$$

**2.-** A partir de (1), (2) y (4) se establecen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} P &= 2qa\operatorname{senh}\left(\frac{x_M}{a}\right); \\ f &= a\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - a\cosh\left(\frac{x_M}{a}\right); \\ s_{MB} &= a\operatorname{senh}\left(\frac{x_B}{a}\right) - a\operatorname{senh}\left(\frac{x_M}{a}\right) \end{aligned}$$

Diferenciando éstas, en la suposición de un hilo de longitud constante:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= 2q\cosh\left(\frac{x_M}{a}\right)\mathrm{d}x_M \\ \mathrm{d}f &= \operatorname{senh}\left(\frac{x_B}{a}\right)\mathrm{d}x_B - \operatorname{senh}\left(\frac{x_M}{a}\right)\mathrm{d}x_M \\ 0 &= \cosh\left(\frac{x_B}{a}\right)\mathrm{d}x_B - \cosh\left(\frac{x_M}{a}\right)\mathrm{d}x_M. \end{aligned}$$

Eliminando $\mathrm{d}x_M$ y $\mathrm{d}x_B$ se obtiene:

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2q}\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x_B}{a}\right) - \operatorname{tgh}\left(\frac{x_M}{a}\right)\right)\mathrm{d}P = \frac{1}{2q}\frac{\operatorname{senh}(\frac{x_B-x_M}{a})}{\cosh(\frac{x_M}{a})\cosh(\frac{x_B}{a})}\mathrm{d}P$$

Al ser $x_B > x_M$ resulta $\mathrm{d}f/\mathrm{d}P$ siempre positivo y el equilibrio es estable. En efecto, supongamos que se produce una perturbación en la posición de $P$, por ejemplo, aumentando la flecha ($\mathrm{d}f > 0$). Al ser $\mathrm{d}P > 0$, la carga que debería equilibrar esa flecha sería mayor que $P$. Como esa carga en realidad no está, tenemos una resultante neta hacia arriba que devuelve la carga $P$ a su posición de equilibrio. Del mismo modo se razona en el sentido opuesto.