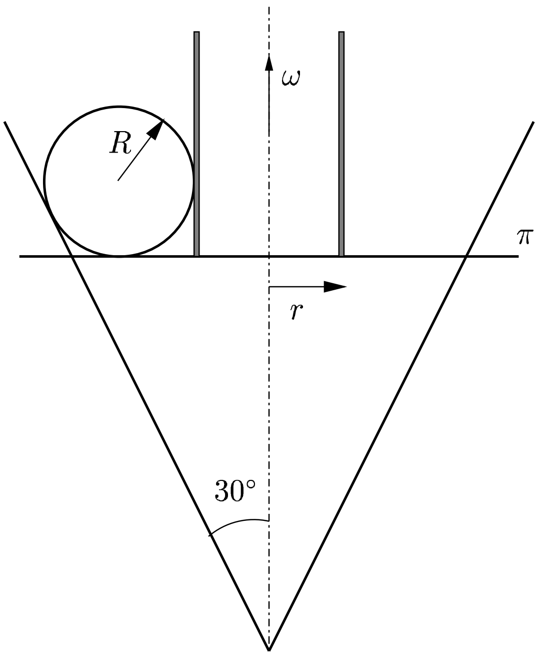
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

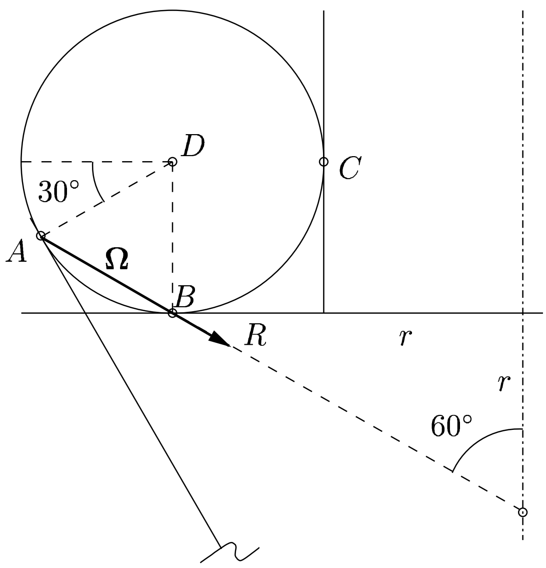
Ejercicio 4º Tiempo: 45 min.

Un cilindro de revolución, cuyo radio vale $r = R(1+\sqrt{3})/2$, gira alrededor de su eje con velocidad angular constante ω.
Una esfera de radio R rueda sin deslizar sobre el exterior del cilindro, sobre un plano fijo π y sobre la superficie cóncava de un cono de revolución también fijo, de semiángulo cónico 30° y cuyo eje de revolución coincide con el del cilíndro (ver sección principal del sistema en la figura). Se pide:



1. Velocidad angular y definición del eje del movimiento helicoidal tangente.
2. Velocidades absolutas de rodadura y pivotamiento de la esfera respecto del cilindro y respecto del plano.
3. Aceleración del punto geométrico de contacto entre la esfera y el cilindro.

1.- La esfera rueda sin deslizar sobre el plano y el cono fijos respectivamente en B y A, por lo que ambos puntos tienen velocidad nula como pertenecientes a la esfera. Por tanto el movimiento es una rotación instantánea, en la que el eje de rotación pasa por los puntos citados, formando un ángulo de 60° con la vertical. A su vez, corta al eje de revolución del cilindro en un punto situado a la siguiente cota por debajo del plano:



$$z = \frac{R+r}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{R(3+\sqrt{3})/2}{\sqrt{3}} = R\frac{\sqrt{3}+1}{2} = r.$$

La magnitud de la velocidad angular Ω se puede calcular igualando la velocidad del punto C de rodadura, como perteneciente a la esfera y al cilindro:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_C^{\text{esfera}} = \Omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\right)\wedge(R\,\boldsymbol{i} + R\,\boldsymbol{j}) = \Omega R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{v}_C^{\text{cilindro}} = \omega r\,\boldsymbol{k} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Omega = \omega}$$

(Los versores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ indican respectivamente las direcciones horizontal hacia la derecha, vertical ascendente, y perpendicular al papel hacia fuera.)

2.- Las velocidades de pivotamiento y rodadura sobre el plano son precisamente las componentes vertical y horizontal de $\boldsymbol{\Omega}$ respectivamente:

$$(\Omega_p)^{\text{plano}} = \Omega_y = -\frac{1}{2}\omega;$$
$$(\Omega_r)^{\text{plano}} = \Omega_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega.$$

La velocidad de rotación de la esfera respecto al cilindro es $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} - \omega\,\boldsymbol{j} = \omega(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}\boldsymbol{j})$. Las componentes de pivotamiento y rodadura sobre el cilindro son:

$$(\Omega_p)^{\text{cilindro}} = \Omega'_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega;$$
$$(\Omega_r)^{\text{cilindro}} = \Omega'_y = -\frac{3}{2}\omega.$$

3.- El punto *geométrico* de contacto coincide instantáneamente con los puntos correspondientes de esfera y cono, pero ni su velocidad ni su aceleración coinciden con las de éstos. Dicho punto geométrico permanece sobre la sección meridiana (la dibujada en las figuras anteriores), por lo que calcularemos en primer lugar la velocidad con la que esta sección gira alrededor del eje de revolución del conjunto. Para ello, nos fijamos en el punto D centro de la esfera, que está siempre en dicha sección meridiana. Su velocidad, como perteneciente a la esfera, es:

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{\Omega} \wedge (R\,\boldsymbol{j}) = \omega\frac{\sqrt{3}}{2}R\,\boldsymbol{k},$$

y teniendo en cuenta que su distancia al eje de revolución es $(r+R)$, la velocidad de rotación de la sección meridiana resulta

$$\omega' = \frac{v_D}{r+R} = \frac{\omega}{1+\sqrt{3}}.$$

El punto geométrico citado describe una circunferencia horizontal de radio r con velocidad de rotación ω'. Por tanto su aceleración es

$$\boldsymbol{a}_C = (\omega')^2 r\,\boldsymbol{i} = \omega^2\frac{R}{2}\frac{1}{1+\sqrt{3}}\,\boldsymbol{i}.$$