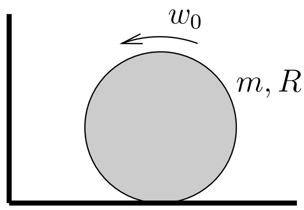
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

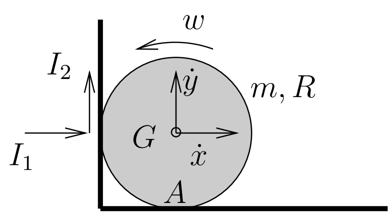
Ejercicio 5.º Tiempo: 45 min.

Un disco homogéneo de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre un plano horizontal *liso* con velocidad angular w_0, manteniéndose vertical en todo momento. En un cierto instante choca con una pared vertical rugosa, de forma que el coeficiente de restitución según la normal a la pared es e_n y según la tangente es e_t.



Se pide:

1. Demostrar que el disco, inmediatamente después del impacto, se levanta del suelo.
2. Determinar el campo de velocidades del disco inmediatamente después del choque y la magnitud de las percusiones que aparecen.
3. En el caso de que $e_n = 1$, calcular el coeficiente de rozamiento mínimo ($\mu_{\min}$) que debe tener la pared vertical para que el disco quede sin velocidad angular después del choque.
4. Calcular la altura máxima del bote que se produce después del impacto, y la distancia a la que se produce el siguiente contacto con el suelo (para las condiciones del apartado anterior).



1.- Suponemos que el disco se separa del suelo ($\dot{y} \neq 0$). En este caso no existe ninguna percusión en el punto (A) de contacto: ni vertical (puesto que suponemos que se levanta) ni horizontal (dado que el suelo es liso).

Las ecuaciones que gobiernan el impacto del disco son:

$$m\dot{y} = I_2 \qquad \text{(c. mov. vertical)} \qquad (1)$$

$$m\dot{x} - (-m\omega_0 R) = I_1 \qquad \text{(c. mov. horizontal)} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}mR^2(\omega - \omega_0) = -RI_2 \qquad \text{(m. cinético en } G\text{)} \qquad (3)$$

$$e_n = -\frac{\dot{x}}{-\omega_0 R} \qquad \text{(coef. restit. normal)} \qquad (4)$$

$$e_t = -\frac{\dot{y} - \omega R}{-\omega_0 R} \qquad \text{(coef. restit. tangencial)} \qquad (5)$$

(1), (2), (3), (4) y (5) forman un sistema de 5 ecuaciones para las incógnitas ($\dot{x}, \dot{y}, \omega, I_1, I_2$). Eliminando I_2 y ω entre (1), (3) y (5), se obtiene el valor de la velocidad vertical $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \frac{1}{3}R\omega_0(1 + e_t)$$

que se comprueba que es en cualquier caso mayor que cero. Esto está deacuerdo con la hipótesis realizada al principio, por lo que queda demostrado que el disco de levanta.

2.- Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) hallamos las expresiones para el resto de incógnitas, obteniéndose:

$$\dot{x} = \omega_0 R e_n \qquad \dot{y} = \frac{1}{3} R\omega_0 (1 + e_t) \qquad \omega = \frac{1}{3}\omega_0 (1 - 2e_t)$$

$$I_1 = m\omega_0 R(1 + e_n) \qquad I_2 = \frac{1}{3} m R\omega_0 (1 + e_t)$$

3.- Para que $\omega = 0$, el coeficiente de restitución tangencial e_t necesario es:

$$0 = \frac{1}{3}\omega_0 (1 - 2e_t) \quad \Rightarrow \quad e_t = \frac{1}{2}$$

por lo que el coeficiente de rozamiento mínimo necesario ($\mu_{\min}$) para $e_n = 1$ resulta:

$$\mu_{\min} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

4.- El movimiento posterior es de tipo parabólico. La distancia vertical (h) que recorre el centro del disco entre el instante inmediatamente posterior al impacto y el punto de altura máxima se calcula como:

$$\frac{1}{2} m\dot{y}^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{18g} R^2 \omega_0^2 (1 + e_t)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ e_t = \frac{1}{2}}}{=} \frac{1}{8g} R^2 \omega_0^2$$

La distancia horizontal entre las dos primeras posiciones consecutivas del centro G se calcula mediante la expresión:

$$d = \dot{x}\frac{2\dot{y}}{g} = \frac{2}{3g} R^2 \omega_0^2 (1 + e_t) \underset{\substack{\uparrow \\ e_t = \frac{1}{2}}}{=} \frac{1}{g} R^2 \omega_0^2$$