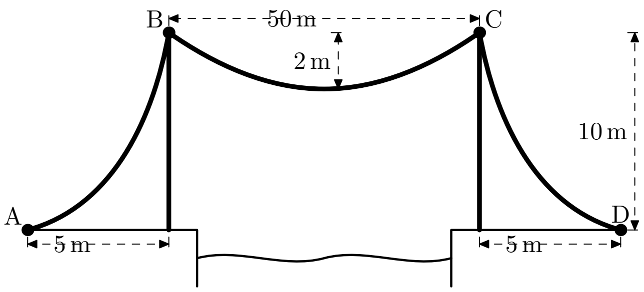
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (30 de Enero de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Se quiere salvar un canal de navegación mediante un cable anclado en dos pilas en sus extremos (B,C). El cable tiene un peso por unidad de longitud de $q = 0{,}4$ kg/m, las pilas tienen 10 m de alto, la distancia entre pilas es de 50 m y la flecha que debe tener el cable es de 2 m.



Con estas condiciones se pide:

1. Longitud del cable BC.

2. Fuerza ejercida por el cable sobre las pilas.

3. Anclando por fuera del canal en los puntos A y D, a una distancia de 5 m, con unos nuevos cables de las mismas características que el principal, ¿cuál debe ser la longitud total de cable entre A y D para que no haya esfuerzos laterales en las pilas?

1.— En el tramo BC de la catenaria la flecha es $f = 2$ m, y la luz $L = 50$ m. Llamaremos $\ell = L/2$ a la mitad de la luz. La ecuación de la catenaria es $y = a\cosh(x/a)$, que aplicada en el centro conduce a

$$a\cosh\frac{\ell}{a} = a + f\,, \tag{1}$$

donde se desconoce el valor del parámetro de la catenaria $a = T_0/q$, siendo T_0 la tensión horizontal. Esta es una ecuación no lineal trascendente, cuya solución debe abordarse por un método numérico iterativo, para lo que usaremos el de Newton. Para ello primero calculamos una solución aproximada considerando el cable como una parábola, $y = (1/2a)x^2$. Particularizando para $x = \ell,\ y = f$ resulta

$$a = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{f} = 156{,}25\,\text{m}\,. \tag{2}$$

El algoritmo iterativo de Newton para resolver una ecuación $g(a) = 0$ es como se sabe

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}\,, \tag{3}$$

donde la función y su derivada son

$$g(a) = a\left(\cosh\frac{\ell}{a} - 1\right) - f\,; \quad g'(a) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}a} = \cosh\frac{\ell}{a} - 1 - \frac{\ell}{a}\operatorname{senh}\frac{\ell}{a}\,. \tag{4}$$

Empezando por el valor $a_0 = a_{\text{parábola}}$ damos varias iteraciones, hasta que converge el resultado:

n	a	$g(a)$	$g'(a)$
0	156,25	0,004270	$-0{,}01288$
1	156,5244	0,0007417	$-0{,}01284$
2	156,5822	0,00000028	$-0{,}01283$
3	156,5822	$-8 \cdot 10^{-10}$	$-0{,}01283$

La solución es por tanto $a = 156{,}5822$ m. La longitud del tramo BC es

$$S_{BC} = 2a \operatorname{senh} \frac{\ell}{a} = 50{,}2127 \, \mathrm{m} \, . \tag{5}$$

2.— La tensión horizontal es $T_0 = qa = 62{,}6328$ kg. La tensión vertical máxima vale $T_y = qa \operatorname{senh}(\ell/a) = 10{,}0425$ kg, y la tensión total es $T = qa \cosh(\ell/a) = 63{,}4329$ kg. (Nota: valores expresados en kg fuerza, para convertir a N habría que multiplicar por $g = 9{,}81$.)

3.— Las pilas ejercen solo una fuerza vertical sobre el cable, por lo que la tensión horizontal será la misma en todas las ramas, y por tanto también será igual el parámetro a de las otras catenarias. La ecuación que expresa la diferencia de cota en el tramo AB es

$$y_B - y_A = a \cosh \frac{x_B}{a} - a \cosh \frac{x_B - 5}{a} = 10 \, , \tag{6}$$

siendo x_B la abscisa (desconocida) de la catenaria en B desde su vértice teórico. Considerando $\cosh A - \cosh B = 2 \operatorname{senh} \frac{A+B}{2} \operatorname{senh} \frac{A-B}{2}$ la expresión anterior conduce a

$$2 \operatorname{senh} \frac{2x_B - 5}{2a} \operatorname{senh} \frac{5}{2a} = \frac{10}{a} \, , \tag{7}$$

de la cual se despeja inmediatamente el valor de $x_B = 228{,}5416795$ m. Podemos calcular por tanto la longitud del tramo AB

$$S_{AB} = a \operatorname{senh} \frac{x_B}{a} - a \operatorname{senh} \frac{x_B - 5}{a} = 11{,}1804 \, \mathrm{m} \, . \tag{8}$$

La longitud total de los tres tramos es

$$S_{ABC} = 2 \cdot 11{,}1804 + 50{,}2127 = 72{,}5736 \, \mathrm{m}. \tag{9}$$