

Mecánica

1.º EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 1999)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 2.º

Tiempo: 30 min.

Una masa m se mueve según una recta horizontal lisa, unida por un resorte lineal de constante $k = m\omega_0^2$ a un punto Q de la misma, con un amortiguamiento viscoso de constante $c = 2m\xi\omega_0$ asociado a dicho resorte. Se impone al punto Q un movimiento armónico de amplitud A y frecuencia angular Ω según dicha recta. En función de la elongación del resorte (x), obtener de forma justificada:

- ecuación diferencial del movimiento;
- amplitud del movimiento en régimen permanente;

1.- El movimiento impuesto de la base del muelle es $x_Q(t) = A \sin \Omega t$. El desplazamiento (absoluto) de la masa es suma de este movimiento impuesto y la propia elongación del muelle, $x_Q + x$, lo que debe ser tenido en cuenta para expresar la aceleración (absoluta) de la masa, $\ddot{x}_Q + \ddot{x}$. Sin embargo, las fuerzas elástica y de resistencia viscosa del resorte son proporcionales únicamente a su elongación ($-kx$) y a la derivada de la misma ($-c\dot{x}$). La ecuación del movimiento es por tanto

$$m(\ddot{x}_Q + \ddot{x}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mA\Omega^2 \sin \Omega t.}$$

2.- El movimiento en régimen permanente vendrá dado por una expresión del tipo $x_p(t) = B \sin(\Omega t + \phi)$. Para calcular las constantes (B, ϕ) obligamos a que cumpla la ecuación diferencial:

$$-mB\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi) + cB\Omega \cos(\Omega t + \phi) + kB \sin(\Omega t + \phi) = mA\Omega^2 \sin \Omega t,$$

y particularizamos en dos instantes,

- para $t = 0$:

$$-mB\Omega^2 \sin \phi + cB\Omega \cos \phi + kB \sin \phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \phi = \frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k} = \frac{2\xi(\omega_0/\Omega)}{1 - (\omega_0/\Omega)^2};$$

- para $\Omega t + \phi = 0$:

$$cB\Omega = mA\Omega^2 \sin(-\phi) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{mA\Omega \sin \phi}{c} = -\frac{A \sin \phi}{2\xi(\omega_0/\Omega)}.$$

Eliminando ϕ entre estas dos ecuaciones se obtiene el valor de la amplitud pedida B :

$$\sin \phi = \frac{\text{tg } \phi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \phi}} = \frac{c\Omega}{\sqrt{(m\Omega^2 - k)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{2\xi(\omega_0/\Omega)}{\sqrt{(1 - (\omega_0/\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0/\Omega)^2}}$$

$$\boxed{B = -\frac{mA\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2 - k)^2 + c^2\Omega^2}} = -\frac{A}{\sqrt{(1 - (\omega_0/\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0/\Omega)^2}}}$$