Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

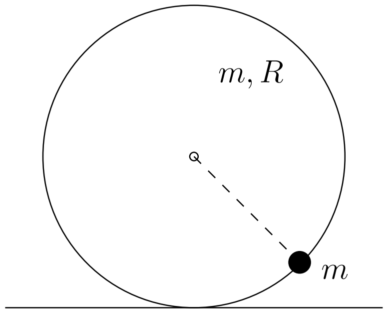
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: parcial 12/30, final 10/60) Tiempo: 60 min.

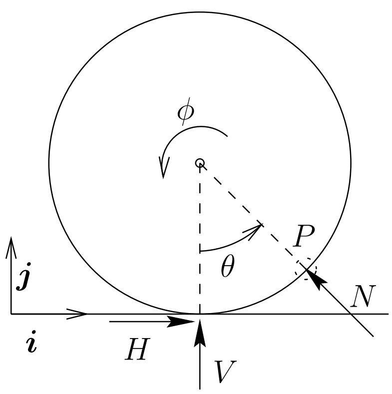
Un aro de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Sobre él se mueve sin rozamiento una partícula de masa m con ligadura bilateral que no estorba la rodadura. Aplicando los teoremas de Newton-Euler, se pide:



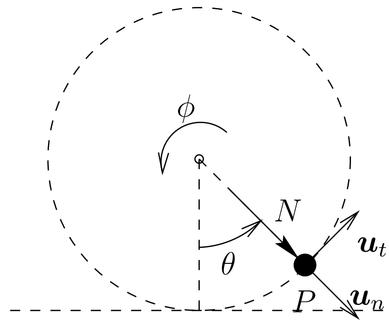
1. Calcular la reacción que la recta ejerce sobre el aro y la reacción que el aro ejerce sobre la partícula, en función de los grados de libertad y sus derivadas.

2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.

1.– El sistema puede considerarse descompuesto como suma de dos subsistemas, el aro y la partícula:



Subsistema aro



Subsistema partícula

Establecemos en primer lugar la ecuación que resulta de los momentos en el centro del aro para el subsistema aro:

$$\boxed{HR = mR^2\ddot{\phi}} \tag{1}$$

A continuación, la expresión que resulta de la fuerza normal al aro en el subsistema partícula:

$$N + mg\cos\theta = ma_{Pn}. \tag{2}$$

La aceleración de la partícula puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_P &= -R\ddot{\phi}\,\boldsymbol{i} - R\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{u}_n + R\ddot{\theta}\,\boldsymbol{u}_t \\
&= (-R\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta - R\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_n + (-R\ddot{\phi}\cos\theta + R\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_t && (3)\\
&= (-R\ddot{\phi} - R\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + R\ddot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{i} + (R\dot{\theta}^2\cos\theta + R\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{j}; && (4)
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación (2) resulta

$$\boxed{N = -mg\cos\theta - mR\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta - mR\dot{\theta}^2} \tag{5}$$

La reacción V puede calcularse a partir de la ecuación que resulta de las fuerzas verticales en el sistema conjunto,

$$\boxed{V - 2mg = mR\dot{\theta}^2\cos\theta + mR\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{6}$$

2.– Planteamos la ecuación de fuerzas horizontales en el sistema conjunto,

$$H = -mR\ddot{\phi} + m(-R\ddot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta + R\ddot{\theta}\cos\theta). \tag{7}$$

Eliminando H entre (1) y (7) resulta:

$$\boxed{3mR\ddot{\phi} = -mR\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta + mR\ddot{\theta}\cos\theta.} \tag{8}$$

Por último, planteamos la ecuación de fuerzas tangenciales al aro para el subsistema partícula,

$$\boxed{-mg\,\mathrm{sen}\,\theta = -mR\ddot{\phi}\cos\theta + mR\ddot{\theta}.} \tag{9}$$

Las ecuaciones (8) y (9) definen la dinámica del sistema.